si se pretende aludir con ellas al aspecto explicativo o descriptivo de la lección, con lo cual ésta quedaría reducida definitivamente a un puro fárrago memorístico.

Parece, pues, que por diversas razones hemos de resignarnos, por ahora, a que nuestra Geografía siga siendo tan ignorada para las generaciones futuras como lo ha sido para las pasadas. Pero lo peor es que, a la larga, los pueblos pagan a precio muy caro —en su misma carne y en su misma sangre— el desconocimiento de su Geografía.

Actualmente, todos los países occidentales se han dado cuenta de la trascendental importancia del conocimiento geográfico de su territorio para el desarrollo de su economía y, a fin de cuentas, para la elevación del nivel medio de vida de sus habitantes. En todos ellos los estudios especializados de geografía tienen la máxima categoría universitaria, y no hay institución docente del grado que sea donde no se enseñe a sus alumnos la geografía nacional con un criterio moderno.

La vida de todos los millones y millones de españoles que han sido, son y serán se da sobre un mismo territorio. Si esto es así, ¿por qué razón se está procurando eliminar del plano docente lo poco que se conoce geográficamente sobre nuestro país? ¿Por qué motivo nos empeñamos en que los españoles "odien la Geografía desde los once años y la ignoren desde los trece"?

PEDRO PLANS.

crónica

Aritmética de la escalera

UNA LECCION DE CALCULO MENTAL SOBRE UN MODELO IMAGINADO, PARA ALUMNOS DE NUEVE A DIEZ AÑOS

En los primeros grados de la enseñanza primaria, como resultado de las experiencias observadas o realizadas por los niños, se llega a un tipo de intuición sensible que es la base del conocimiento matemático en este estadio de la educación. De esta intuición sensible debe ascenderse por etapas sucesivas a otro tipo de intuición que busca su apoyo en el concreto imaginado y que se realiza preferentemente por ejercicios de cálculo mental. Tales ejercicios, de gran valor formativo, deben prodigarse en los primeros cursos del Bachillerato y aún en las escuelas preparatorias para el ingreso en la enseñanza media.

Una escalera imaginada nos proporciona un modelo que, por su gran riqueza de situaciones dinámicas, se presta perfectamente para esta clase de ejercicios, a la vez que permite la introducción heurística, desde edades muy tempranas, de gran número de conceptos matemáticos, tanto aritméticos como geométricos.

En el último cursillo para profesores de matemáticas organizado por el C. de O. D. y dirigido por el profesor Puig Adam, tuve ocasión de desarrollar ante los profesores cursillistas, y con alumnos de la Escuela preparatoria del Instituto de San Isidro, todos ellos menores de diez años, la siguiente lección experimental de media hora de duración. No pretendí, naturalmente, en tan escaso tiempo, agotar todas las posibilidades de la situación, ni tampoco la introducción o toma de conciencia de un concepto determinado, sino solamente proporcionar a los cursillistas un ejemplo de clase activa de cálculo mental que utiliza como material un modelo imaginado tomado de la propia vida del alumno.

Transcribo sin alteración las contestaciones espontáneas de los niños.

¿Sabéis lo que es una escalera? Sí, señor. ¿Qué es más difícil, subir o bajar? Subir es más difícil. En vuestra clase de Aritmética, ¿habéis estudiado las escaleras? No, señor. En la Aritmética ¿hay alguna escalera? (silencio). ¡Pensad! Un alumno dice tímidamente: los números 1, 2, 3... forman como una escalera. ¿Os parece eso una escalera? Sí, señor. ¡Subid por ella! Los alumnos cuentan 1, 2, 3..., hasta 10. ¿Se terminó? No, señor; sigue más, 11, 12, 13... Cuentan hasta 20. ¿Se terminó? No, señor; se puede seguir más. ¿Hasta 100? Más. ¿Hasta 1.000? Más. ¿Hasta cuánto? No se termina nunca. ¿Esa escalera de los números hasta dónde llega? Un alumno dice: hasta infinito. Otro: hasta el cielo. Entonces esta escalera es como la escala de Jacob: llega al cielo. Bien, habéis subido hasta 20; ahora bajad. Los alumnos cuentan 20, 19, 18... ¿Qué es más difícil ahora, subir o bajar? ¡Bajar! Pues entonces vamos a subir, pero más de prisa. Los alumnos cuentan como antes, 1, 2, 3..., pero más rápidos. ¡Más de prisa! Lo hacen en la misma forma pero más rápido. Yo quiero subir más de prisa aún. Un alumno: se puede subir de dos en dos. Muy bien, hazlo. 2, 4, 6... 20. ¿Se terminó? No, señor; se puede seguir. ¡Bajad! Lo hacen. De tres en tres. Lo hacen. De cuatro en cuatro. Lo hacen. De cinco en cinco. Lo hacen y dicen: ahora es más fácil. De siete en siete. Lo hacen con bastante dificultad. Bajad de siete en siete. Casi todos tropiezan.

Si estoy en el peldaño 7 y subo ocho, ¿a qué peldaño llegaré? Al 15. ¿Si estoy en el 8 y subo siete? También al 15. ¿Si estoy en el 15 y bajo ocho? Al 7. ¿Si estoy en el 15 y bajo siete? Al 8. Si después de subir ocho llegué al 15, ¿en qué peldaño estaba? En el 7. Si estaba en el 7 y llegué al 15, ¿cuántos subí? Ocho. Si estaba en el 15 y llegué al 7, ¿cuántos subí? No subí, bajé ocho.

¿Si estoy en el 4 y bajo uno? Al 3. ¿Si estoy en el 4 y bajo dos? Al 2. ¿Si bajo tres? Al 1. ¿Si bajo cuatro? Entonces llegamos al suelo; se acabó la escalera. ¿Cómo llamaremos al suelo? Silencio. ¿Qué número pondremos en el suelo? ¡El cero! ¿Si estoy en el peldaño 4 y bajo cinco? No se puede, porque al bajar cuatro ya se llega al suelo. Bien; ¿vosotros habéis visto en Madrid edificios muy altos? Sí, señor: el edificio España, la Torre de Madrid. ¿Cuántos pisos tiene el edificio España? Lo menos 20; más. Se entabla una discusión entre los niños y convienen en ir a contarlos. Bueno, si os colocáis en la Plaza de España y contáis los pisos que veis desde ella, ¿no tendrá el edificio más pisos? Un alumno: Sí, señor; tiene también sótanos que no se ven. ¿Cómo será entonces la escalera? Desde el suelo hacia arriba para ir a los pisos y hacia abajo para los sótanos. Entonces, en esa escalera, si estoy en el peldaño 4 y bajo cinco, ¿a qué peldaño llego? Un alumno: ¡a una décima! ¿Y si bajo otro peldaño? ¡A una centésima! ¿Por qué? No sé. Me parece que nos hemos caído de la escalera; volvamos a ella. Estamos en el peldaño 4 ¿bajamos uno? llego al 3. ¿Si bajamos dos? Llego al 2. ¿Si bajamos tres? Llego al 1. ¿Si bajamos cuatro? Al suelo. ¿Si bajamos cinco? Entonces estamos en los sótanos. ¿En qué peldaño? En el 1 debajo del suelo. ¿Si estoy en el 4 y bajo seis? En el 2 debajo del suelo. ¿Si ahora bajo otros tres? En el 5. ¿En el 5? Sí, en el cinco debajo del suelo. ¿Si bajo siete más? En el 12 debajo del suelo. ¿Si ahora subo cuatro? En el 8 debajo del suelo. ¿Si subo ocho? En el suelo. ¿Qué número? El cero. Si estando en el 7 debajo del suelo subo diez, ¿a cuál llego? Al 3 por encima del suelo. Si estaba en el 3 debajo del suelo y llegué al 10 debajo del suelo, ¿qué es lo que hice? Bajar siete. Para ir del 3 debajo del suelo al 10 sobre el suelo, ¿qué tengo que hacer? Subir tres.

Si partiendo del suelo subo de tres en tres, ¿en qué peldaños pisaré? En el 3, 6, 9, 12, 15... ¿Cómo se llaman esos números? Múltiplos de 3. Si subiendo de cuatro en cuatro he dado siete pasos, ¿a qué peldaño he llegado? Al 28. Si subiendo de cinco en cinco he llegado al 35, ¿cuántos pasos he dado? Siete. Si di seis pasos y llegé al 30, ¿cuántos peldaños subo en cada paso? Cinco. ¿Cuántos pasos he de dar para llegar desde el suelo al 26, subiendo de cuatro en cuatro? Un alumno: No se puede. Otro: seis pasos y medio. ¿Qué quiere decir medio paso? Que el último paso es la mitad. ¿La mitad de qué? La mitad de cuatro peldaños, o sea, dos peldaños. Si estoy en el peldaño 5 y subo de tres en tres, ¿en qué peldaños pisaré? 5, 8, 11, 14, 17, 20... ¿Estos números son múltiplos de 3? No, señor. ¿Por qué? Porque no empezó en el suelo. ¿Si hubiera comenzado desde el 6? Entonces, sí. Si estoy en el 5 y quiero llegar al 23, ¿cuántos peldaños he de subir? 18. ¿Puedo subir de tres en tres? Sí, señor. ¿Cuántos pasos he de dar? Seis.

Subiendo de dos en dos ¿pisaré en el 12? Sí, señor. ¿De tres en tres? Sí, señor. ¿De cuatro en cuatro? También. ¿De cinco en cinco? No, señor. ¿De cuántas maneras puedo subir al 12? De dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y de seis en seis. ¿Alguna más? No, señor. Se os olvida la más fácil. Bueno, de uno en uno. ¡Otra muy fácil! ¡Ah!; de una vez los doce. Esos números: 1, 2, 3, 4, 6 y 12 ¿qué son? Submúltiplos de 12. ¿Cómo se llaman también? No sabemos. Bien, los llamaremos divisores. ¿De cuántas maneras puedo subir al 13? De uno en uno y de trece en trece. ¿Nada más? Nada más. ¿Cuáles son los divisores de 13? El 1 y el 13. ¿Podrías decirme los divisores de 18? 1, 2, 3, 4 (4 no) 6, 9 y 18. ¿Cómo subiría la escalera si quiero pisar en el 12 y también en el 18? Puedo subir de uno en uno; de dos en dos; de tres en tres; de cuatro en cuatro, ¡no!; porque no pisaría en el 18; de seis en seis; y ninguno más. Esos números: 1, 2, 3, 6, ¿qué son? Divisores de 12 y también de 18. ¿Cómo subiría más rápido? De seis en seis. ¿Por qué? Porque es el paso más largo posible. ¿Qué número es el 6? El mayor. ¿El mayor de quiénes? De los divisores de 12 y de 18.

Me dirijo a un alumno: ¿Cómo te llamas? Juan. Bien, Juan, dime los peldaños que pisarás si subes la escalera de seis en seis. Contesta: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60. A otro alumno, llamado Pedro, le pido que suba de ocho en ocho. Enuncia: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80. A un tercero: ¿En qué peldaños ha pisado Juan? Los repite. ¿En qué peldaños ha pisado Pedro? Los repite. ¿Cómo se llaman los números de Juan? Múltiplos de 6. ¿Y los de Pedro? Múltiplos de 8. ¿En qué peldaños han pisado Juan y Pedro? Repite separadamente los de Juan y los de Pedro. ¿Juan ha pisado en el 30? Sí, señor. ¿Y Pedro? No, señor. Dime ahora los peldaños en que ha pisado Juan y también Pedro. Tantea y dice: 24 y 48. ¿Nada más? Nada más. Si siguen subiendo, ¿habrá más peldaños en que pisen los dos? Siguiendo, sí. Todos esos números en que pisan los dos, ¿qué son? Múltiplos de 6 y múltiplos de 8. ¿Cuál es el primer peldaño que pisan uno y otro? El 24. ¿Este número es múltiplo de 6 y de 8? Sí, señor. ¿Qué múltiplo es? El primero. ¿No hay otro antes? De 6, sí; pero de los dos, de 6 y de 8, no, señor.

¿Estaréis fatigados? ¡No, señor!

*

Aquí di por terminada la lección para dar tiempo a los profesores, una vez retirados los niños, a que hicieran los comentarios y críticas para ver de extraer consecuencias de la experiencia realizada.

La lección prueba que es posible, cuando se tiene un apoyo concreto, impulsar fuertemente la toma de conciencia de las relaciones que constituyen la esencia de la actividad matemática. Los niños han captado bien la reversibilidad de las operaciones aritmética de suma y resta, por analogía con las de subir y bajar. Igualmente la multiplicación y división tanto exacta como entera. Los verdaderos conceptos de las operaciones, en el sentido del Algebra moderna, con predominio del concepto de número ordinal sobre el de cardinal, están latentes en todas las lecciones. Igualmente la divisibilidad aparece como relación de orden. La introducción de los números negativos es natural y sugiere la cuestión del por qué se ha de retrasar su estudio al tercer curso del Bachillerato, cuando tal vez debiera hacerse antes de los fraccionarios; no tienen mayor dificultad. La contestación de un alumno al decir: una décima y una centésima es muy significativa a este respecto. Está implícito en toda la lección el concepto de *anillo* fundamental en la Aritmética de los números enteros.

José R. Pascual Ibarra.