



Congreso
«Comprender
para aprender:
competencias
matemática y lectora»

Congrés
«Comprendre
per aprendre:
competències
matemàtica i lectora»

27-28
mayo
maig

Palau Firal i
de Congressos
de Tarragona

Organizadores | Organitzadors



tothom



Colaboradores | Col·laboradors





¿Qué se esconde en la botella?

Una experiencia de aula para desarrollar el sentido estocástico

Berta Barquero

Facultat d'Educació. Universitat de Barcelona bbarquero@ub.edu

Carles Granell

Col·legi Sant Lluís i Universitat de Barcelona cgranel4@xtec.cat

Congreso
«Comprender
para aprender:
competencias
matemática y lectora»

Congrés
«Comprendre
per aprendre:
competències
matemàtica i lectora»

Estructura del Taller

1. **Primera parte:** Experimentación de la situación en grupos
¿Qué se esconde dentro de la botella?
2. **Segunda parte:** Breve presentación de los orígenes de la situación y adaptación de una experiencia para Primaria
3. **Tercera parte:** Análisis de una selección de informes de la experiencia en Primaria
4. **Para cerrar el taller:** Discusión sobre el análisis y sobre su adaptación a distintos contextos educativos



Estructura del Taller

1. **Primera parte:** Experimentación de la situación en grupos
¿Qué se esconde dentro de la botella?
2. Segunda parte: Breve presentación de los orígenes de la situación y adaptación de una experiencia para Primaria
3. Tercera parte: Análisis de una selección de informes de la experiencia en Primaria
4. Para cerrar el taller: Discusión sobre el análisis y sobre su adaptación a distintos contextos educativos



Primera parte

Experimentación de la situación *¿Qué se esconde dentro de la botella?*

¿Qué material tenemos?



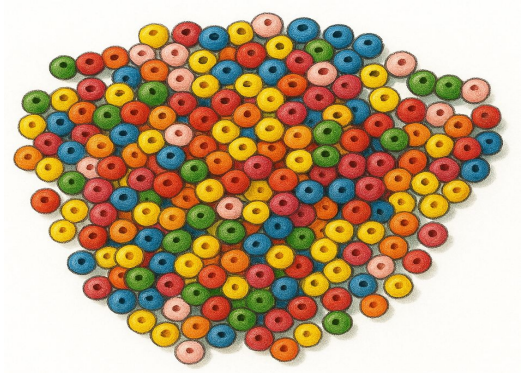
Botellas

Recipientes opacos a los que NUNCA
podremos acceder a su interior

¿Qué se esconde dentro de la botella?

Piezas de madera de diferentes colores

¿De qué colores?



Primera parte

Experimentación de la situación *¿Qué se esconde dentro de la botella?*



¿Qué nos preguntamos?

Si conocemos el **número total de piezas** que hay en el interior de una botella y **SOLO podemos mirar el color de la pieza que se sitúa en el cuello de la botella** cada vez que reproducimos el experimento...

Q_0 : ¿Cuántas piezas de cada color se esconden dentro de la botella?

¿Qué hipótesis podemos formular sobre la distribución de piezas de color oculta dentro de la botella? ¿Cómo de seguros estáis?

Primera parte

Experimentación de la situación *¿Qué se esconde dentro de la botella?*

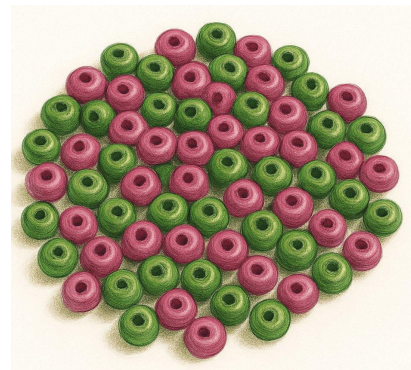
¿En qué consiste el experimento?

¿Qué sabemos, con total seguridad, sobre la configuración inicial de la botella?

Tenemos un total de 5 piezas
de máximo
2 colores diferentes

¡Las construiremos en directo!

Prepararemos una botella por grupo sin que nadie vea ni sepa qué hay dentro de cada botella



Primera parte

Experimentación de la situación *¿Qué se esconde dentro de la botella?*



Trabajo en grupo [20 min] y **Puesta en común** [15 min]

¿Qué discutiremos en la puesta en común?

- ¿Qué hipótesis final habéis decidido sobre el contenido oculto de la botella?
- ¿Qué decisiones habéis tomado sobre cómo realizar experimento y la recogida de datos?
- ¿Qué hipótesis habéis formulado y cómo estas han ido variando a lo largo del experimento?
- ¿Qué nivel de seguridad tenéis sobre la hipótesis final que defendéis? ¿Por qué?
... entre otras preguntas que hayáis tratado



Estructura del Taller

1. Primera parte: Experimentación de la situación en grupos
¿Qué se esconde dentro de la botella?
2. **Segunda parte:** Breve presentación de los orígenes de la situación y adaptación de una experiencia para Primaria
3. Tercera parte: Análisis de una selección de informes de la experiencia en Primaria
4. Para cerrar el taller: Discusión sobre el análisis y sobre su adaptación a distintos contextos educativos

Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

Orígenes y antecedentes de la situación didáctica

- La propuesta de la actividad proviene de los trabajos de ingeniería didáctica realizados hacia los años 70-80 por el investigador francés **Guy Brousseau** y su equipo de Burdeos, en el marco de la **Teoría de Situaciones Didácticas**.
- En el **COREM Centre pour l'Observation et la Recherche** sur l'Ens. des Maths.) de la escuela Michelet de Talence (Burdeos, 1970-2000) se trabajó en la propuesta de numerosos diseños y experimentaciones en las aulas, en Infantil, Primaria y Secundaria.
- La actividad original de las piezas escondidas en la botella se diseñó y experimentó en varias ocasiones en un total de **26 sesiones de aula** (Brousseau, Brousseau y Warfield, 2002) en 5º de Primaria.



Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

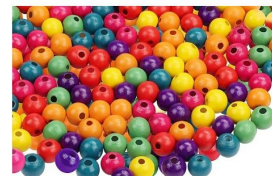
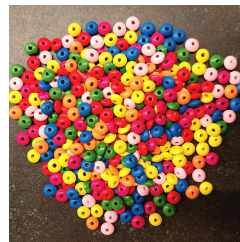
Reto inicial y cuestión de partida

Q_0 : Si conocemos el número de piezas de diferentes colores que se esconden en la botella, ¿qué distribución de piezas de cada color cree que hay en la botella? ¿Qué hipótesis (coherentes y lo máximo fiables) podemos formular sobre el contenido oculto de la botella?

Recipiente



Contenido



Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria



El proyecto COSMOS y el encargo de Hama Beads

■ Contexto de la experimentación:

- 4º, 5º y 6º de Primaria del Colegio Sant Lluís
- **Primera experimentación curso 2017-2018.** En todos los casos con unos 26 alumnos. Entre 4h y 6h repartidas entre 1 y 2 semanas
- **Maestro:** Carles Granell, con observadores-investigadores, previa colaboración en el diseño de la propuesta



Congreso
«Comprender
para aprender:
competencias
matemática y lectora»

Congrés
«Comprende
per aprende:
competències
matemàtica i lectora»

Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

Q₀ : ¿Qué distribución de piezas de cada color cree que hay en la botella? ¿Qué hipótesis (coherentes y lo máximo fiables) podemos formular sobre el contenido oculto de la botella?



Fase 1

5 bolas de 2 colores diferentes: amarillo y verde; libertad para decidir la cantidad de datos recogidos; sin restricción en el formato de la recogida de datos

Fase 2

Cada grupo diseña un nuevo caso de botella con **5 bolas y máximo 2 colores**; responsabilidad grupal en el diseño, formulación de cuestiones y discusión de la coherencia de respuestas

Fase 3

¡Tenemos que ayudar al director a tomar una decisión! Recibimos 3 muestras con **10 Hama Beads** de 3 marcas que las fabrican; **3 colores** que nos interesan + **1 color de pieza defectuosa**; criterios para decidir qué propuesta es mejor



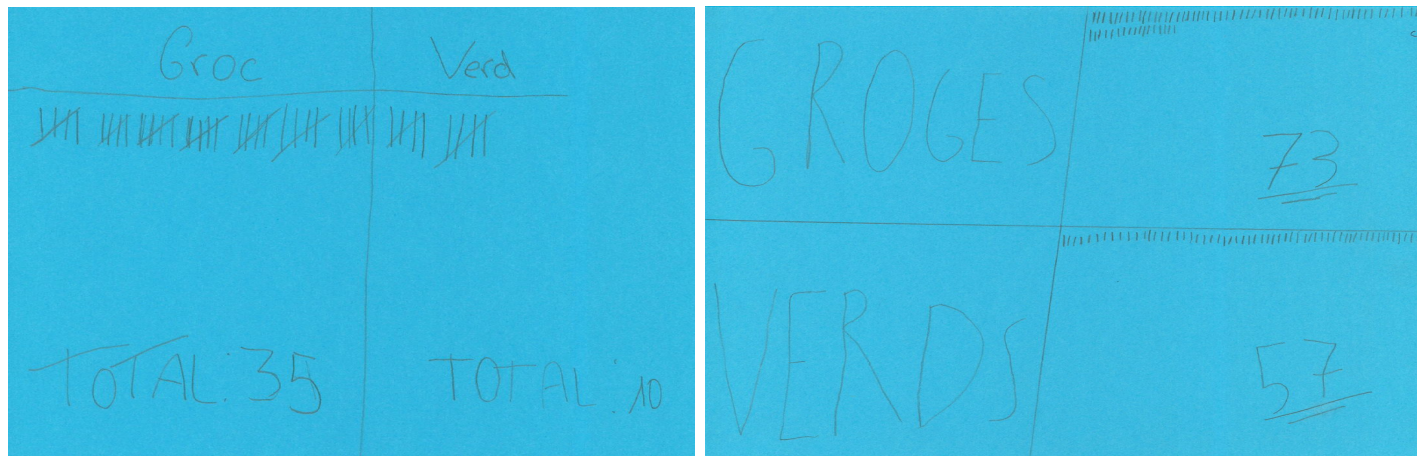
Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

Primera fase: ¿Qué se esconde en la botella?

4º de Primaria

Variables didácticas: **5 bolas de 2 colores diferentes:** amarillo y verde; libertad al decidir la cantidad de datos recogidos; no restricción en el formato de la recogida de datos.



Algunas cuestiones muy relevantes para la gestión y evolución de la situación:

¿Qué se mide en nuestro experimento?

¿Cuántas observaciones son necesarias y cómo recogemos dichas observaciones?

¿Qué información registramos sobre el experimento y cómo?

Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

Primera fase: ¿Qué se esconde en la botella?

4º de Primaria

QUÈ S'AMAGA DINS L'AMPOLLA?

Grupo B


“Porque solo salen las bolitas amarillas y porque se han quedado atrapadas las bolitas verdes”.

ABANS PENSAVA



Porque sol sol les boltes groges i porque si hom quedat atrapades les boltes verdes

ARA PENSO



Porque onbritat la groga li empujassen a la verda

“Porque en realidad la amarilla empuja a la verde”

¿Cómo analizamos los datos observados en nuestro experimento y cómo nos ayuda en la formulación de hipótesis?
¿Cómo ir avanzando en la formulación de hipótesis y movernos de las opiniones hacia las hipótesis coherentes en base a los datos recogidos?

Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria



RESULTATS

GRUP A	● ● ● ● ●	48	20	
GRUP B	● ● ● ● ●	35	10	
GRUP C	● ● ● ● ●	73	57	
GRUP D	● ● ● ● ●	46	72	
GRUP E	● ● ● ● ●	74	62	
GRUP F	● ● ● ● ●	40	10	
	$\begin{array}{r} 296 \\ + 161 \\ \hline 457 \end{array}$	TOTAL	296	161

Congreso
«Comprender
para aprender:
competencias
matemática y lectora»

Congrés
«Comprende
per aprende:
competències
matemàtica i lectora»

Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

Segunda fase: Diseñamos nuestras propias botellas

Variables didácticas: Diseño de un nuevo caso de botella con 2 colores y 5 bolas; responsabilidad grupal en el diseño, información sobre el contenido; intercambio de tarjetas con cuestiones.

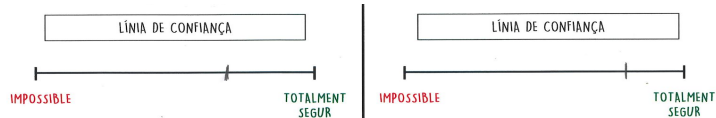
Quines preguntes voleu proposar?

- Quins colors hi ha a l'ampolla? Verd i blau.
- Quantes boles hi ha de cada color? 3 verdes i 2 blaus.
- Quantes vegades podem comprobar? 47 vegades

Grupo diseñador **A**
Grupo investigador **B**

Quines preguntes voleu proposar?

- quantes veieu que hi han de cada color? 2 blau fluit i 1 groc
- quins colors veieu que hi ha? blau fluit i groc
- de quin tamany veieu que son? d'un cm
- veieu que sera impossible respondre a les preguntes? No



Grupo diseñador **C**
Grupo investigador **D**

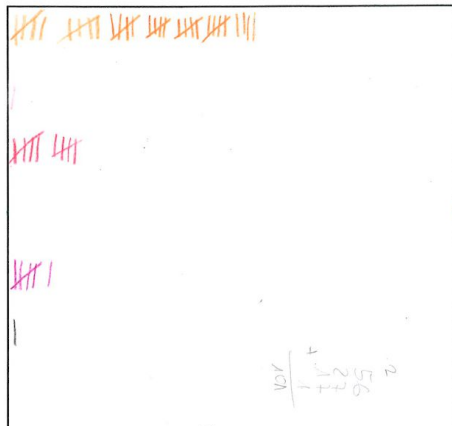
Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

Tercera parte: ¿Qué marca de Hama Beads es mejor para la escuela?

Variables didácticas: Número de piezas de 5 bolas a 10 Hama Beads, naturaleza de las piezas (de bolas a Hama Beads), número de colores (de 2 colores a 4 colores).

RECOLLIDA DE DADES (50 TIRADES)



RESUM DE LES DADES (50 TIRADES)

	TARONJA	LILA	ROSA	MARRÓ	TOTAL
TIRADES	33	6	10	1	50

RESUM DE LES DADES (100 TIRADES)

	TARONJA	LILA	ROSA	MARRÓ	TOTAL
TIRADES	55	27	17	1	100

Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

Tercera parte: ¿Qué marca de Hama Beads es mejor para la escuela?

Variables didácticas: Número de piezas de 5 bolas a 10 Hama Beads, naturaleza de las piezas (de bolas a Hama Beads), número de colores (de 2 colores a 4 colores).

(A) QUINA QUANTITAT DE HAMA BEADS DE COLOR TARONJA, LILA I ROSA HI HA? [≡]

HIPÒTESI DESPRÉS DE 50 TIRADES

Creiem que de taronjes hi han 4, de liles creiem que hi han 3, de roses 2 i de morats 1, perquè ens han sortit moltes taronjines i mica menys de liles, molt pocs roses i una moratona.

Hi ha sortit la línia en aquest lloc perquè no podem exactament quina quantitat de Hama de cada color hi ha, perquè no s'ha obert l'ampolla.

LÍNIA DE CONFIANÇA



HIPÒTESI DESPRÉS DE 100 TIRADES

Creiem que hi han de taronjes 4, 3 liles, 2 roses i una moratona. Perquè han sortit 55 taronjes, 27 liles, 17 roses i 1 moratona. És la línia de confiança ferra perquè així perquè no podem totalment saber de quants Hama hi ha de cada color perquè no hem obert l'ampolla.

LÍNIA DE CONFIANÇA

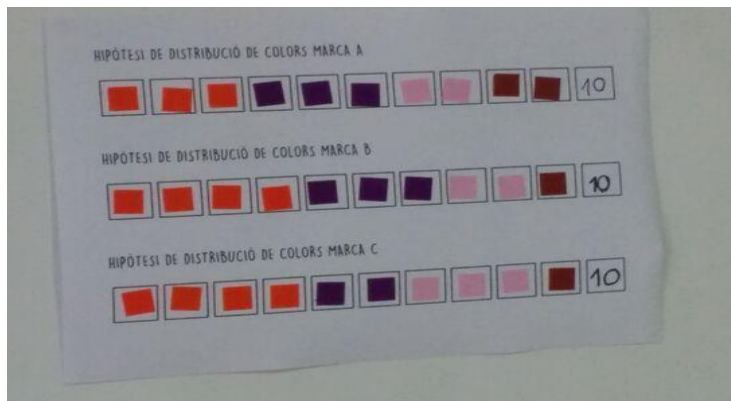


Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

Tercera parte: ¿Qué marca de Hama Beads es mejor para la escuela?

Variables didácticas: Número de piezas de 5 bolas a 10 Hama Beads, naturaleza de las piezas (de bolas a Hama Beads), número de colores (de 2 colores a 4 colores).



Segunda parte

De sus orígenes a su adaptación para Primaria

Tercera parte: ¿Qué marca de Hama Beads es mejor para la escuela?

Variables didácticas: Número de piezas de 5 bolas a 10 Hama Beads, naturaleza de las piezas (de bolas a Hama Beads), número de colores (de 2 colores a 4 colores).

(A) QUINA QUANTITAT DE HAMA BEADS DE COLOR TARONJA, LILA I ROSA HI HA? [≡]

HIPÒTESI DESPRÉS DE 50 TIRADES

Creiem que de taronjes hi han 4, de liles creiem que hi han 3, de roses 2 i de morats 1, perquè ens han sortit moltes taronjines i mica menys de liles, molt pocs roses i zero morats.

Hom trontol la línia en aquest lloc perquè no podem exactament quina quantitat de Hama de cada color hi ha, perquè no s'ha obert l'ampolla.

LÍNIA DE CONFIANÇA



HIPÒTESI DESPRÉS DE 100 TIRADES

Creiem que hi han de taronjes 4, 3 liles, 2 roses i una morat. Perquè han sortit 55 taronjes, 27 liles, 17 roses i 1 morat.

Ém la línia de confiança fiava però així perquè no podem totalment saber de quants Hama hi ha de cada color perquè no hem obert l'ampolla.

LÍNIA DE CONFIANÇA



Estructura del Taller

1. Primera parte: Experimentación de la situación en grupos
¿Qué se esconde dentro de la botella?
2. Segunda parte: Breve presentación de los orígenes de la situación y adaptación de una experiencia para Primaria
3. **Tercera parte:** Análisis de una selección de informes de la experiencia en Primaria
4. Para cerrar el taller: Discusión sobre el análisis y sobre su adaptación a distintos contextos educativos

Tercera parte

Análisis de una selección de informes de la experiencia en Primaria

Análisis de los dosieres: “Antes pensaba / Ahora pienso”

- Cada equipo, durante el Taller, se encargará de analizar los dosieres individuales elaborados por un mismo grupo al finalizar la FASE 1 de la situación.
- Los grupos analizados pueden ser de **4º, 5º o 6º de Primaria**.
- El objetivo es analizar cómo evoluciona el trabajo matemático asociado a la recogida de datos, el análisis de datos, la formulación o reformulación de hipótesis y su justificación.
- Se propone analizar los informes en base a 3 criterios:
 - **Uso de vocabulario específico**
 - **Uso de evidencias en la formulación de hipótesis**
 - **Coherencia del proceso seguido y de las decisiones tomadas**

Tercera parte

Análisis de una selección de informes de la experiencia en Primaria

Miembro del grupo analizado:						
1	Uso de vocabulario específico	1	2	3	4	Observaciones sobre 1
	Vocabulario sobre la recogida de datos	1	2	3	4	
	Vocabulario sobre el análisis de datos	1	2	3	4	
	Vocabulario sobre la formulación de hipótesis	1	2	3	4	
	Vocabulario sobre la validación de hipótesis	1	2	3	4	
	Otros aspectos relacionados con 1					
2	Uso de evidencias en la formulación, validación ... de hipótesis	1	2	3	4	
	Uso de datos recogidos por el grupo	1	2	3	4	
	Uso de datos recogidos por toda la clase	1	2	3	4	
	Otros aspectos relacionados con 2					
3	Coherencia	1	2	3	4	Observaciones sobre 3
	Coherencia del proceso seguido	1	2	3	4	
	Coherencia de las hipótesis formuladas	1	2	3	4	
	Coherencia de las justificaciones aportadas	1	2	3	4	
	Otros aspectos relacionados con 3					



Estructura del Taller

1. Primera parte: Experimentación de la situación en grupos
¿Qué se esconde dentro de la botella?
2. Segunda parte: Breve presentación de los orígenes de la situación y adaptación de una experiencia para Primaria
3. Tercera parte: Análisis de una selección de informes de la experiencia en Primaria
4. **Para cerrar el taller:** Discusión sobre el análisis y sobre su adaptación a distintos contextos educativos

Cuarta parte

Análisis de una selección de informes de la experiencia en Primaria

Para empezar con la puesta en común

- ¿Qué criterio ha resultado más determinante para valorar el trabajo individual o grupal?
- ¿Ha habido consenso en la valoración de los informes? ¿Dónde han aparecido más discrepancias?
- ¿Qué criterios, qué aspectos han sido más difíciles de interpretar o valorar en las evidencias aportadas?
- ¿Qué aspectos, qué nuevos criterios consideraréis importante añadir?
- Entre otras preguntas.



Para cerrar el Taller - Adaptaciones en distintos contextos educativos

Implementación en 5º de Primaria

- Experiencia previa con actividades sobre experimentos aleatorios, el azar y el cálculo de frecuencias experimentales → Juegos de dados
- Uso de las **fracciones** y discusión en términos de **proporciones**
- Transformación de **fracciones a decimales** ante la dificultad de discutir fracciones con diferentes denominadores
- Necesidad del paso a los **porcentajes** para facilitar la comparación de números decimales menores que 1

Para cerrar el Taller - Adaptaciones en distintos contextos educativos



Primera parte: ¿Qué se esconde en la botella?

5º de Primaria

ANTES
PENSABA...

“Porque cuando las hemos mezclado, han salido más amarillas y solo una verde. Yo creo que el porqué es que hay más porcentaje de amarillas. De diez personas que han mirado, dos han visto verde”.

QUÈ S'AMAGA DINS L'AMPOLLA?

ABANS PENSAVA



Porque quan les hem barrejat i han sortit més grogues, sol una verda i jo crec que el porqué es que hi ha més percentatge de grogues.
De deu persones que l'han mirat sol dos persones han vist el verd.

ARA PENSO



Porque quan al principi van tirar tres grogues i una de les quals va ser verda i perquè de 100 sol 19 van ser verdes jo crec que antigades sortiren bastantes verdes.

... AHORA
PIENSO

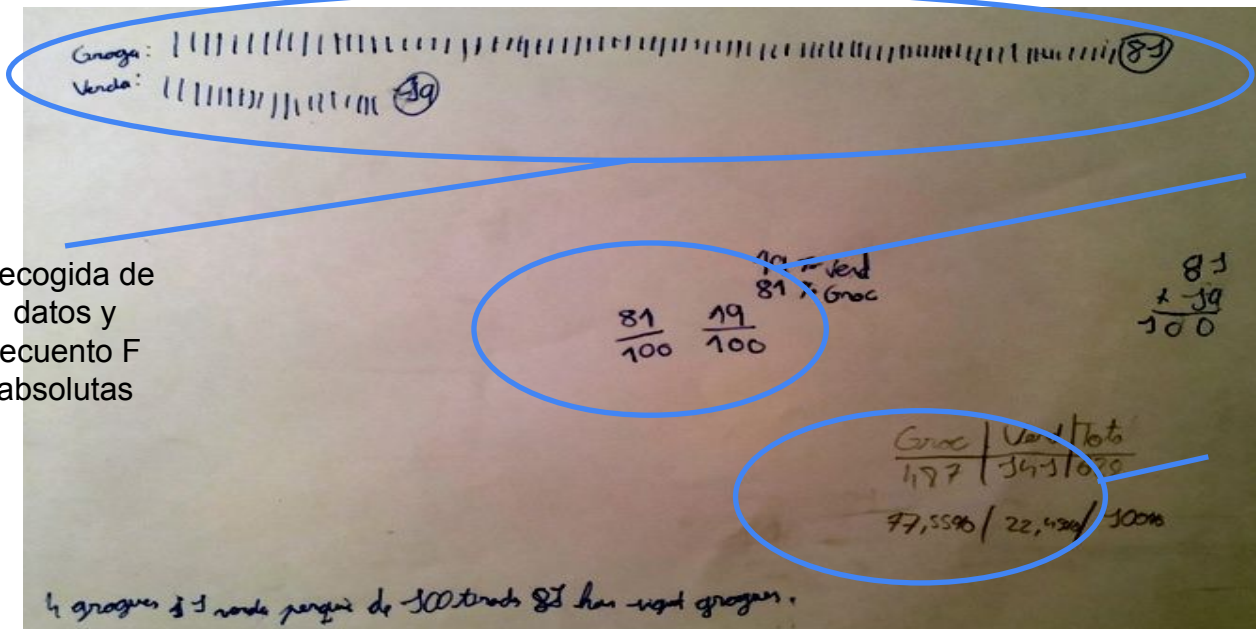
“Porque cuando al principio tiraron tres veces y una fue verde, aunque de 100 solo 19 fueron verdes, yo creo que a veces saldrán bastantes verdes”.

Para cerrar el Taller - Adaptaciones en distintos contextos educativos



Primera parte: ¿Qué se esconde en la botella?

5º de Primaria



Recogida de datos y recuento F absolutas

Frecuencia relativa sobre 100 tiradas (en fracción)

Frecuencia relativa sobre 628 tiradas (en %)

“4 amarillas y 1 verde porque de 100 tiradas 81 fueron amarillas”

Para cerrar el Taller - Adaptaciones en distintos contextos educativos

Implementación en 6° de Primaria

- Experiencia previa con actividades sobre experimentos aleatorios, el azar y el cálculo de frecuencias experimentales → CARRERA DE CABALLOS
- Recorrido natural de la **fracción al decimal**, como paso intermedio, para llegar al **porcentaje**
- Surge la necesidad de **anticipar los posibles escenarios** (distribución de piezas dentro de la botella) para evitar el trabajo repetitivo de extracción y registro de datos
- Anticipación de todos los **escenarios posibles** y cálculo de las **probabilidades**
- Se discute con qué número de extracciones tiene sentido comparar los **escenarios teóricos** con los **resultados experimentales**
- La **línea de confianza** gana precisión incorporando los %: del 0% al 100%
- Incluso se plantean cuestiones sobre la **variabilidad de los resultados experimentales** respecto a los **teóricos**. ¿Qué puedo hacer para disminuir la variabilidad? ¿Infinitas extracciones?

Continuidad en Secundaria con la incorporación de herramientas de combinatoria...



Congreso
«Comprender
para aprender:
competencias
matemática y lectora»

Congrés
«Comprende
per aprende:
competències
matemàtica i lectora»

Para cerrar el Taller Adaptaciones en distintos contextos educativos

Nivel	Total piezas	Total colores	Botellas	Foco
Ciclo medio o superior de Primaria	5	2	=	Recogida de datos y formulación hipótesis. Discusión grado de seguridad.
	10	4		Introducción de un contexto realista (control de calidad sobre empresas que producen Hamma Beads)
Primer ciclo Secundaria	25	4		Recogida de datos y formulación hipótesis. Comparación de composiciones a través de análisis frecuencias.
Bachillerato	10	6		Recogida de datos y formulación hipótesis. Comparación de composiciones a través de análisis frecuencias. Simulaciones de modelos teóricos.
Grado maestro Primaria	5	2	=	Recogida de datos y formulación hipótesis. Discusión grado de seguridad.
	10	4		Introducción de un contexto realista (control de calidad sobre empresas que producen Hamma Beads)
	8	4		Comparación de composiciones a través de análisis frecuencias.
Máster profes. Secundaria	5	2	=	Recogida de datos y formulación hipótesis. Técnicas de muestreo, simulaciones, distribución binomial e inferencia asociada a contrastes de hipótesis.

Congreso
«Comprender
para aprender:
competencias
matemática y lectora»

Congrés
«Comprende
per aprende:
competències
matemàtica i lectora»





Congreso
«Comprender
para aprender:
competencias
matemática y lectora»

Congrés
«Comprendre
per aprendre:
competències
matemàtica i lectora»

Moltes gràcies!
¡Muchas gracias!

Organizadores | Organitzadors



tothom



Colaboradores | Col·laboradors



Referencias de interés

- Beltrán-Pellicer, P., Bosch, M. y Barquero, B. (2024). Estableciendo puentes entre la investigación y su transferencia al aula. *UNO*, 104, Abril 2024.
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behaviour*, 20(3), 363-411.
- Granell, C. y Barquero, B. (2019). Experiència amb un recorregut d'estudi i investigació sobre la inferència estadística a l'educació primària. Què s'amaga dins l'ampolla? *NouBiaix*, 44, 54-69. <https://revistes.iec.cat/index.php/noubiaix/article/view/105397.003>
- Web LABINQUIRY amb Guies per a Secundària: <https://www.ub.edu/labinquiry/>
- Hakamata, R., Fukuda, H., Otani, H., Otaki, K., Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Potential of Brousseau's guessing game in teacher education: two complementary cases. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2321587>