

Desarrollo profesional del profesorado de
MATEMÁTICAS



GOBIERNO DE ESPAÑA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL Y DEPORTES



PCT de reforç de la
COMPETÈNCIA
MATEMÀTICA

MATERIALES PARA PROMOVER LA INVESTIGACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Manel Martínez
Sílvia Margelí
Carme Vicens

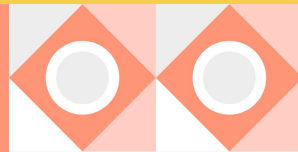


FLORENCE

PER LA MILLORA DE LA
COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

CREAMAT

Matemàtiques
per a tothom



cesire

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
i Formació Professional

ÍNDICE DE LA SESIÓN



Introducción

- Investigar con cartas numéricas
- Actividades con pequeños cubos encajables
- Fracciones

Conclusiones



PCT de refuerzo de la
COMPETENCIA
MATEMÁTICA

25 MINUTOS
POR TALLER

[ja.cat/creamatPCT](https://reloj-alarma.es/temporizador/)

<https://reloj-alarma.es/temporizador/>



Y PARA ACABAR...



DECÀLOGO PARA EL USO DE MATERIALES

Maria Antònia Canals



DECÁLOGO PARA TRABAJAR CON MATERIALES MANIPULABLES. POR MARIA ANTONIA CANALS

1. Presentar una **propuesta de trabajo**, a ser posible **en forma de** pequeña «**investigación**».
2. **Invitar a la acción**, dejando claro qué es lo que se tiene que hacer.



3. **Observar** a los niños y niñas, sus **reacciones**, sus **intereses** y acoger las posibles **ideas e iniciativas**.

4. Estar dispuesto a **cambiar** **el camino previsto** para seguirlas, **aceptando lo imprevisto**.



DECÁLOGO PARA TRABAJAR CON MATERIALES MANIPULABLES. POR MARIA ANTONIA CANALS

5. Pedir la **estimación de resultados** en las medidas y el cálculo (base del cálculo mental) y la **anticipación de fenómenos** geométricos en el espacio.

6. **Provocar** y acompañar **el descubrimiento** de algo nuevo. Cuando lo hayan hecho, **maravillarse y felicitarlos** calurosamente.



7. **Potenciar el diálogo**, invitando a los alumnos a expresar lo que han hecho y lo que han visto. Pedirles **una explicación oral y coherente**.

8. **Resumir** lo que se ha hecho, se ha dicho y, sobre todo, **lo que se ha aprendido**. Ayudar a formular conclusiones.

9. **Relacionarlo** con cosas que se han trabajado anteriormente y, a veces, con otras actividades (calculadora, estadística...).



10. Opcionalmente, pasar algo a **lenguaje escrito, primero coloquial y después matemático** (con cifras y signos).



MATERIALES DEL TALLER

Enlaces y propuestas de
actividades

CARTAS NUMÉRICAS



PCT de refuerzo de la
COMPETENCIA
MATEMÁTICA





MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

Actividades

Exploremos el material

¿Qué elementos podemos observar?



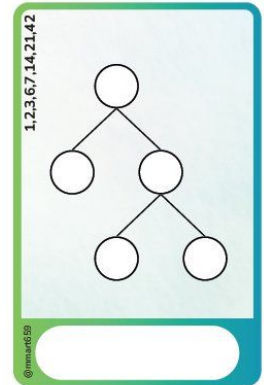
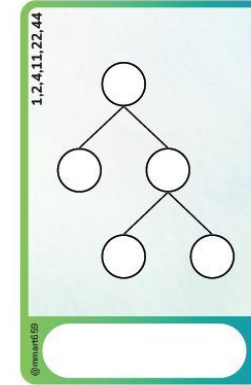
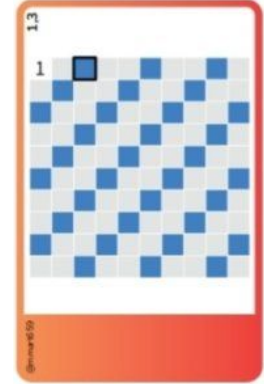
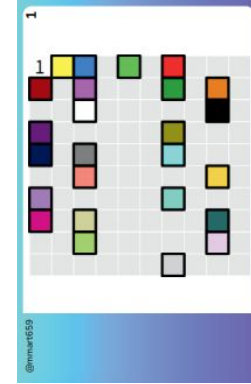
MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

- Cartas de 3 colores: azul, verde y rojo.
- Algunas cartas contienen un marco.
- En una cara tenemos:
 - ✓ los números del 1 al 100
 - ✓ todas las cartas menos la del 1 tienen unos cuadraditos de colores en la parte inferior izquierda
 - ✓ todas tienen un número pequeño en la parte superior derecha



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

- En la otra cara tenemos:
 - ✓ la criba de Eratóstenes en la carta 1, con el código de colores de los cuadraditos (números primos)
 - ✓ patrones de múltiplos en las cartas rojas
 - ✓ un esquema de árbol de factores en las cartas verdes, y un espacio en la parte inferior para escribir, por ejemplo, la factorización del número
 - ✓ la lista de divisores del número en la parte superior izquierda



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

El hotel de las 100 puertas



En un hotel de 100 habitaciones trabajan 100 botones.
Los botones suelen actuar de la siguiente manera:

El primer botones cierra las puertas de todas las habitaciones.
El segundo abre las puertas de las habitaciones pares.

MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

El hotel de las 100 puertas



El tercero modifica el estado de todas las puertas que son múltiplos de 3. Si la puerta se encuentra cerrada, la abre, y si está abierta, la cierra.

El cuarto cambia todas las que son múltiplos de 4...

Y así, hasta que pasa el último botones.

¿Qué puertas quedarán cerradas al final?

MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

puertas abiertas

1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

botones 1

1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

botones 2

1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

botones 3

1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

botones 4

1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

botones 5

1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40



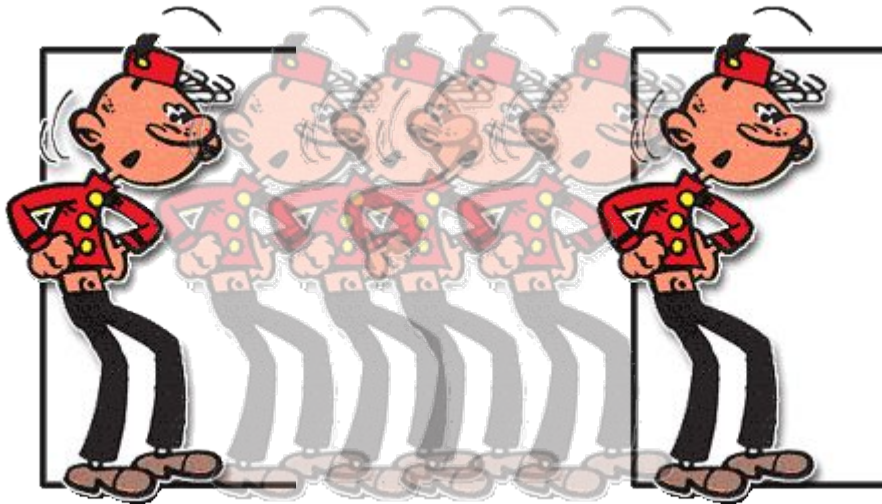
MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"



botones 6



botones 7



botones 8



botones 39



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

botones 40

1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

El hotel de las 100 puertas



Solo quedan cerradas las puertas que corresponden a los cuadrados perfectos.

Son las cartas que tienen un marco y un número impar en la parte superior derecha, y una cantidad impar de divisores.

Son las únicas puertas que cambiarán su estado (abierto-cerrado) una cantidad impar de veces, por lo que quedarán cerradas.

MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

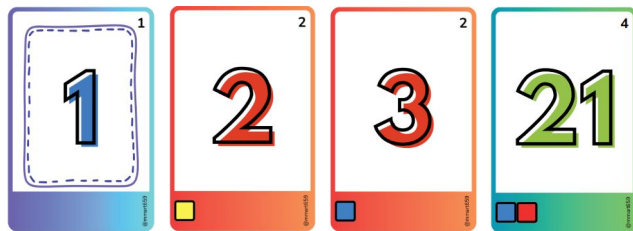
Línea de factores



Tomamos las cartas 1, 2, 3 y 21, y el tablero de la derecha.

Las cartas se sitúan sobre el tablero formando líneas de 4 cartas (horizontal, vertical o diagonal), de manera que una carta se pone sobre un número si es múltiplo o divisor del número de la carta.

¿Cuántas soluciones puedes hallar?

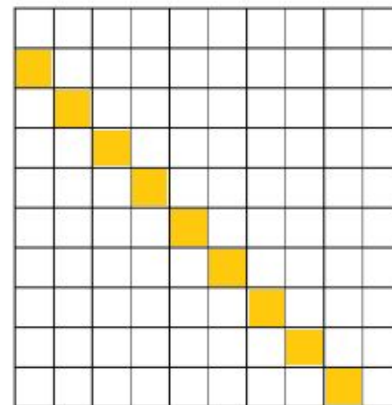
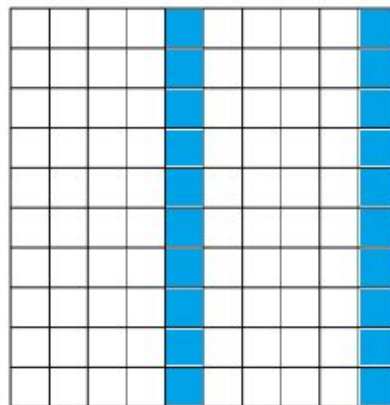
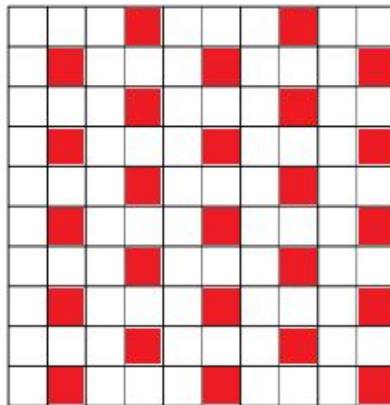
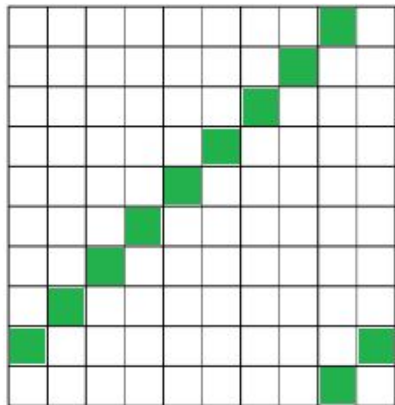
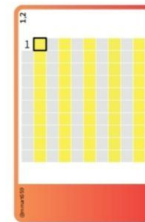
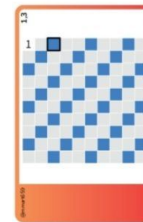


1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

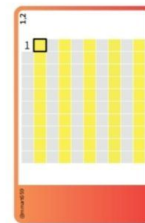
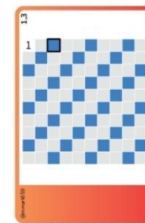
Table Patterns Go Wild!

¿Y estas otras?

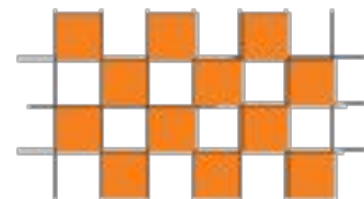
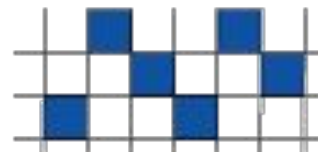
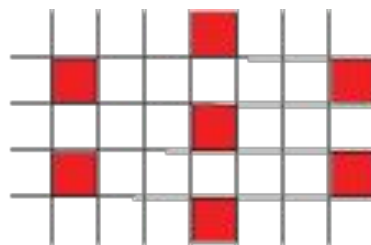
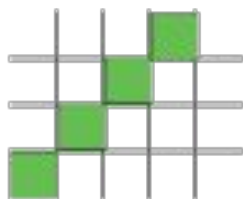
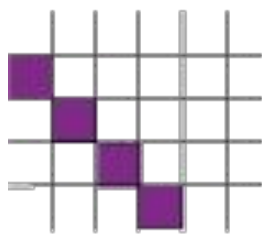


MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

Table Patterns Go Wild!



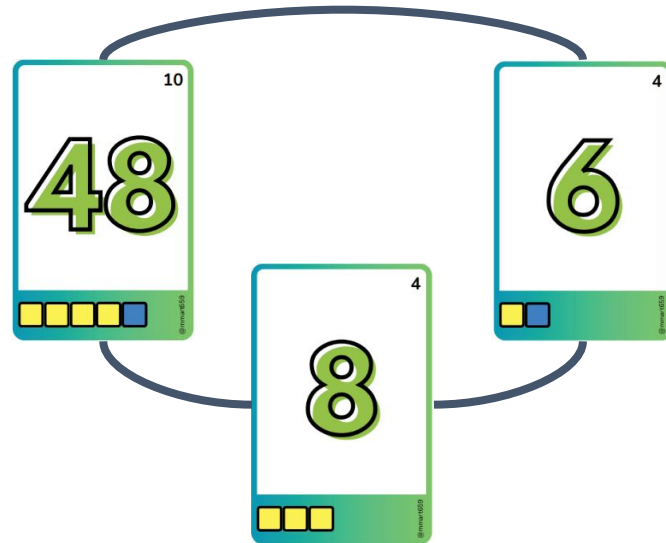
Estos trozos pertenecen a diversas tablas de multiplicar.
Esta vez no se muestran los bordes de las tablas.
¿Podéis identificar en qué tablas de multiplicar pueden surgir estos patrones?



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

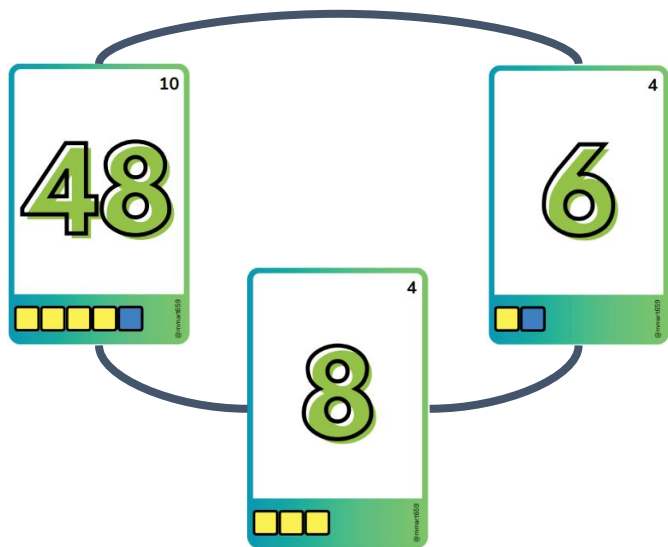
Multiplicación y división

¿Qué relación existe entre estas tres cartas?



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

¿Qué relación existe entre estas tres cartas?



$$48 : 8 = 6$$

Si al código de la carta 48 le eliminamos los cuadrados de la carta 8 obtenemos el código de la carta 6.

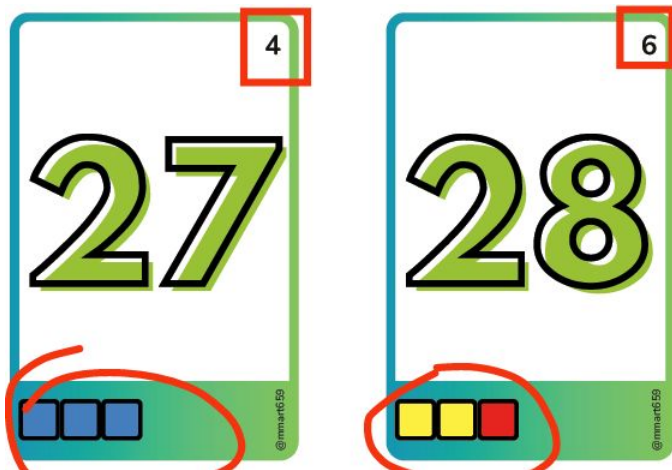
$$6 \times 8 = 48$$

Si al código de la carta 6 le añadimos los cuadrados de la carta 8 obtenemos el código de la carta 48.

MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

¿Y el número de arriba?

¿Qué relación existe entre la cantidad de cuadrados de colores (número de factores) y el número de la parte superior derecha?



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

¿Qué relación existe entre la cantidad de cuadrados de colores (número de factores) y el número de la parte superior derecha?



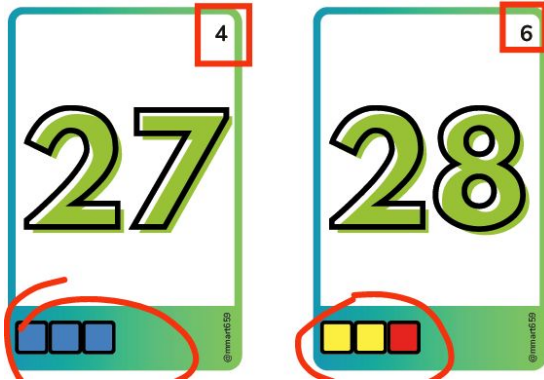
El número de arriba se corresponde con la cantidad de divisores que tiene el número principal de la carta. Se puede comprobar con la lista que aparece en el reverso de la carta.

$$27 = 3^3 \quad (\text{tres cuadrados azules})$$

$$28 = 2^2 \times 7 \quad (\text{dos cuadrados amarillos y uno rojo})$$

MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

¿Qué relación existe entre la cantidad de cuadrados de colores (número de factores) y el número de la parte superior derecha?



El 27 tiene 3 treses y $(3+1)$ divisores.

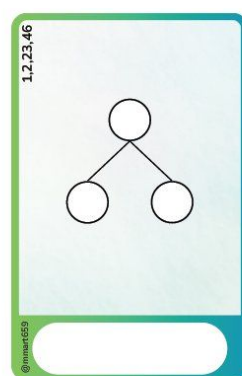
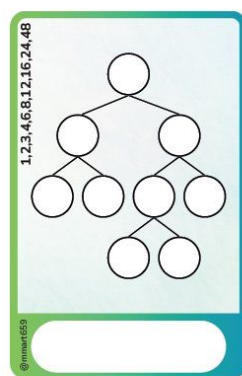
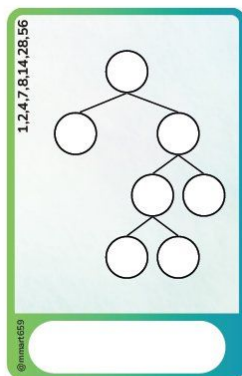
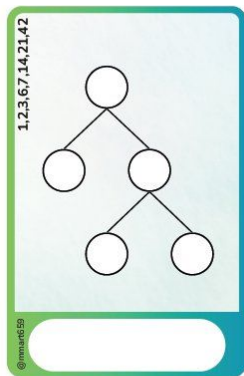
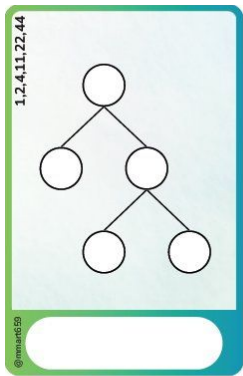
El 28 tiene 2 doses y 1 siete, y $(2+1) \times (1+1) = 3 \times 2 = 6$ divisores

Comprobad esta relación con el resto de cartas.

MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

Árbol de factores

Las cartas verdes tienen detrás un esquema de árbol de factores. ¿Puedes completarlo y escribir la factorización?

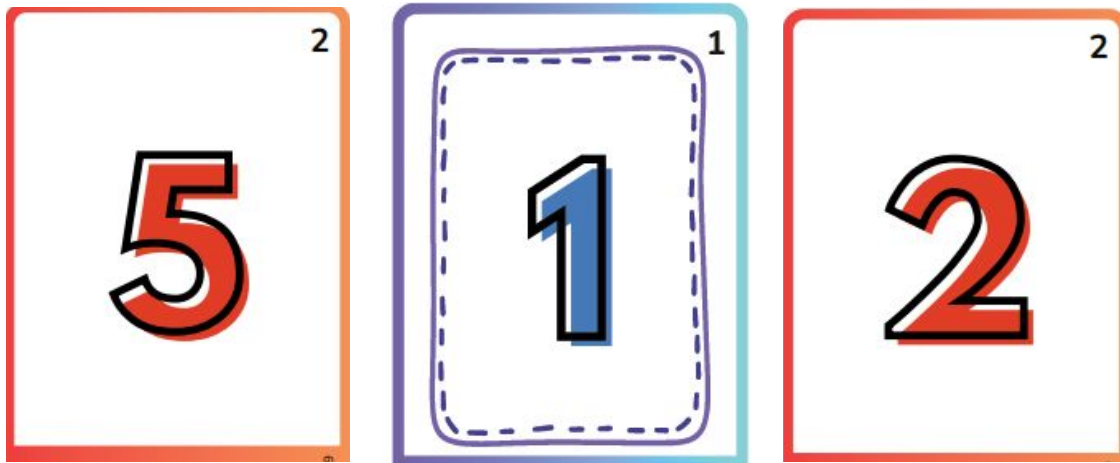


MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

Múltiplos y divisores

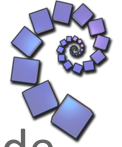


Con las cartas del 1 al 9, construir la cadena más larga de números, de manera que una carta puede estar al lado de otra si es múltiplo o divisor de esta. Podemos añadir cartas al principio de la fila, al final, o entre dos cartas.



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

Múltiplos y divisores

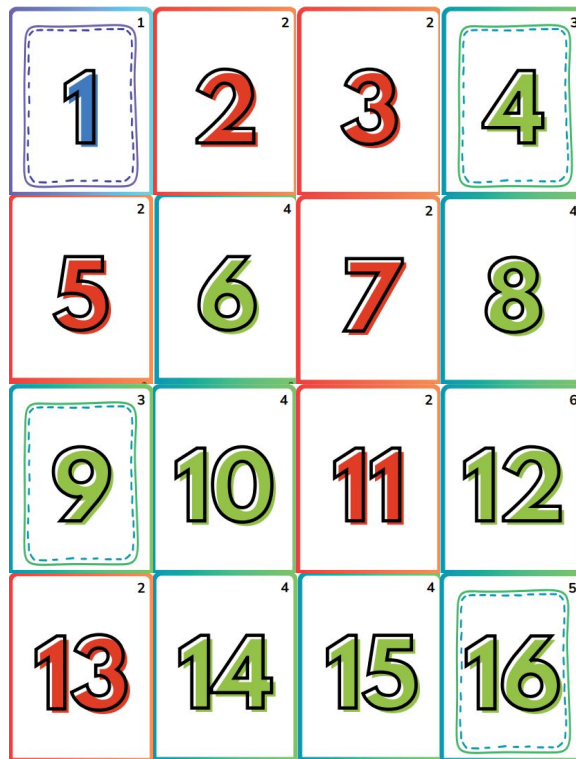


Con las cartas del 1 al 9, construir la cadena más larga de números, de manera que una carta puede estar al lado de otra si es múltiplo o divisor de esta. Si concatenamos las cifras para considerar un número, ¿cuál es el número mayor que se puede conseguir?



MATERIAL "CARTAS NUMÉRICAS"

Factor Game





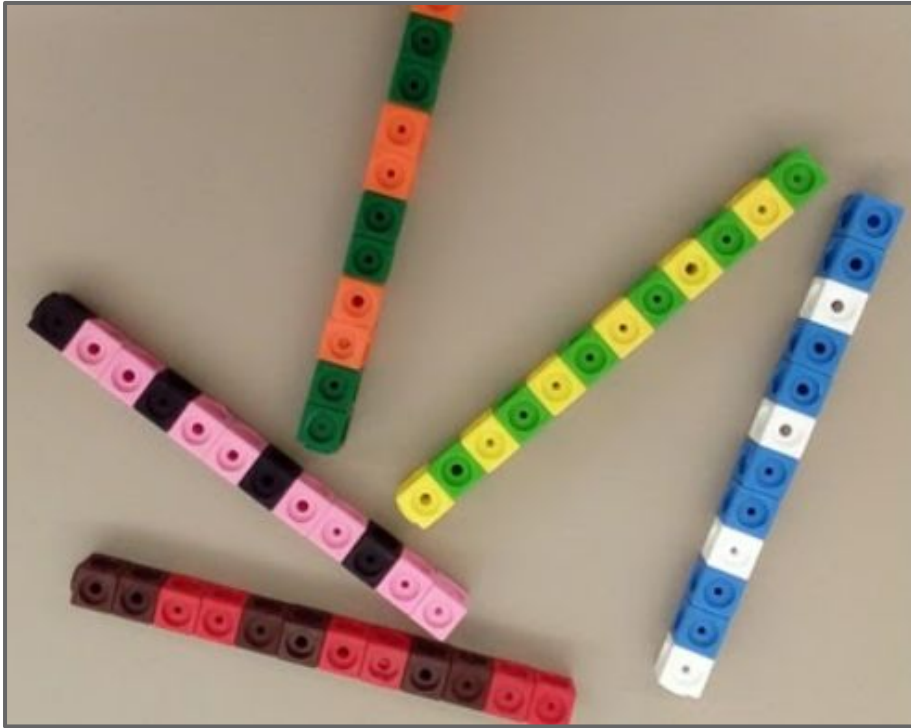
CUBOS ENCAJABLES







Patrones y series



Uso de materiales manipulativos en el aula para investigar

Patrones de repetición

- ¿Cuántos cubos de cada color necesitamos para hacer dos series iguales?
- ¿Cuál es el siguiente elemento?
- ¿De qué color será el cubo número 20? ¿Y el número 50?



CREAMAT

Uso de materiales manipulativos en el aula para investigar

Patrones de repetición: posición

- En problemas de patrones será necesario investigar, buscar distintos elementos empezando por los más cercanos, para acabar buscando la generalización.
- La generalización no tiene por qué ser una expresión algebraica: se puede expresar de otras formas, como por ejemplo con una descripción verbal



CREAMAT

Uso de materiales manipulativos en el aula para investigar

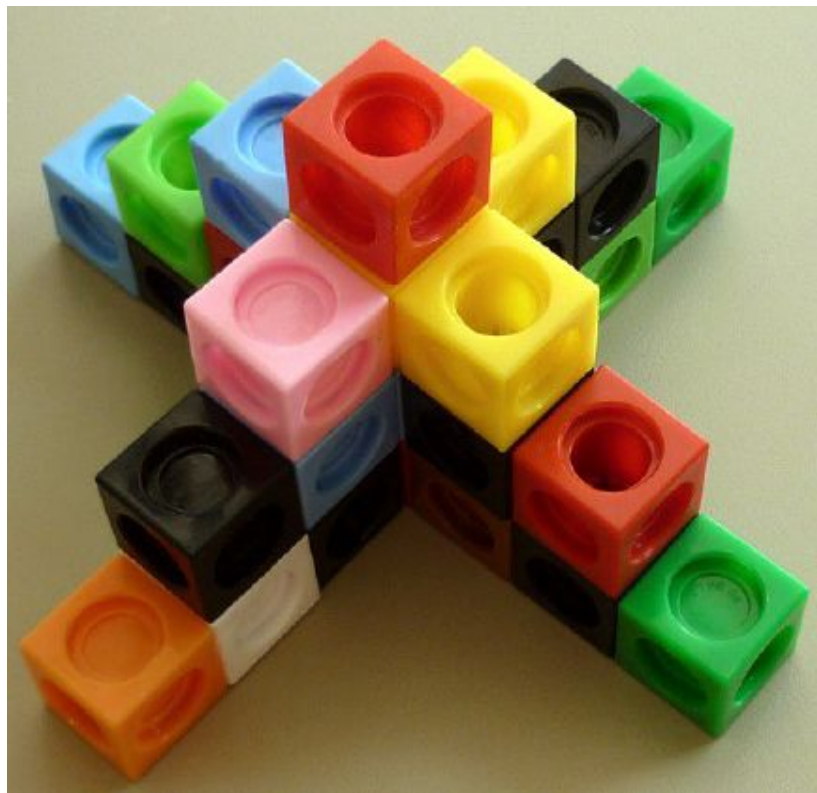
Patrones de repetición: recuento



Mòduls	Blaus	Blancs	Total
1	3	1	4
2	6	2	8
3	9	3	12
4	12	4	16
...

¿Qué observas?

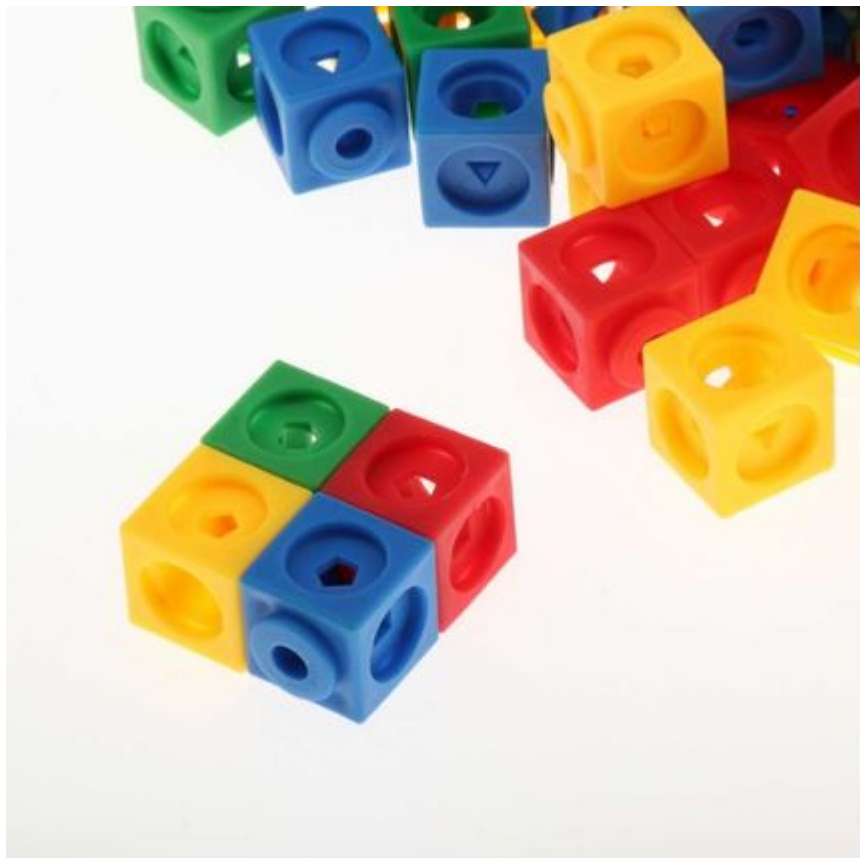
Uso de materiales manipulativos en el aula para investigar



Patrones de crecimiento

- ¿De cuántas piezas está formada la torre?
- ¿Cómo las cuentas?
- ¿Y si le añadimos un piso más?
- ¿Y si...?

Más recursos: [Visual Patterns](#)



¿De cuántas formas...?

MATERIAL "PEQUEÑOS CUBOS ENCAJABLES"

¿De cuántas formas podemos unir dos cubos? ¿Y tres? ¿Y cuatro? (se tienen que tocar, como mínimo, por una cara).



CREAMAT

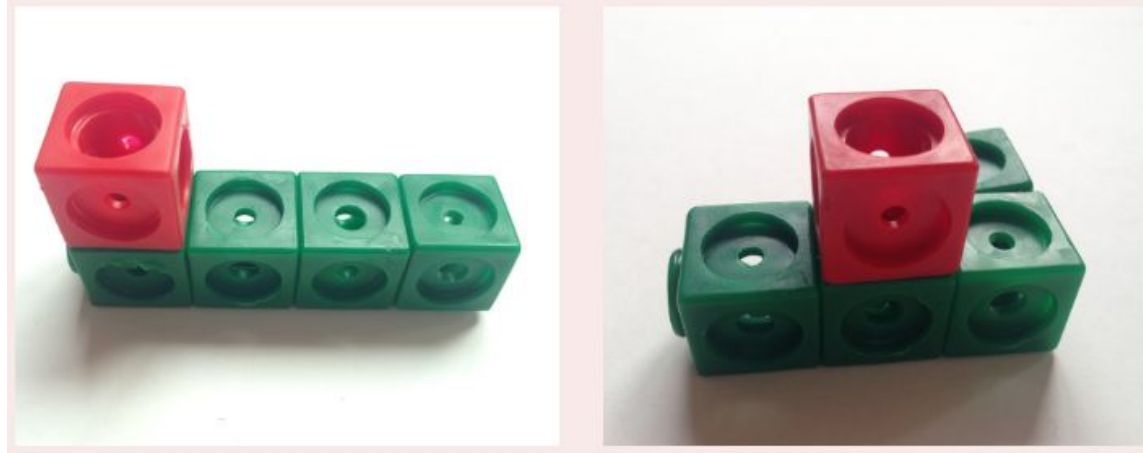


Habrá que concretar: ¿Es importante el color? ¿Importa la posición? ¿Qué pasa con la simetría?...

Distintas investigaciones en función de las condiciones.

MATERIAL "PEQUEÑOS CUBOS ENCAJABLES"

Cubos arriba y abajo



CREAMAT a partir de la actividad de nrich

Disponemos de cuatro cubos verdes y uno rojo. Los verdes tienen que estar tocando el suelo, pero el rojo no puede. ¿Cuántas disposiciones posibles hay?
¿Son iguales sus áreas?

MATERIAL "PEQUEÑOS CUBOS ENCAJABLES"

Combinando colores

¿De cuántas formas podemos ordenar tres cubos de un color y dos de otro?



CREAMAT

MATERIAL "PEQUEÑOS CUBOS ENCAJABLES"

Combinando colores

Tenemos cubos de cuatro colores distintos. ¿Cuántos grupos de tres cubos podemos hacer?

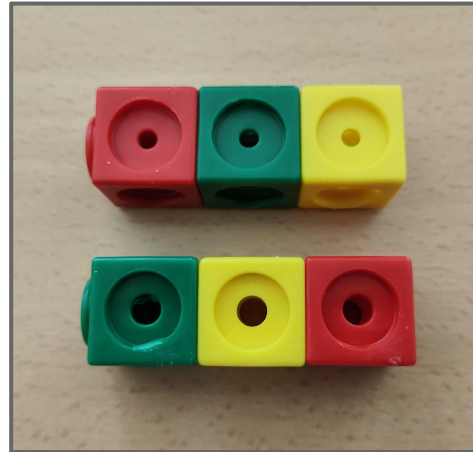


MATERIAL "PEQUEÑOS CUBOS ENCAJABLES"

Combinando colores

Salen las primeras preguntas:

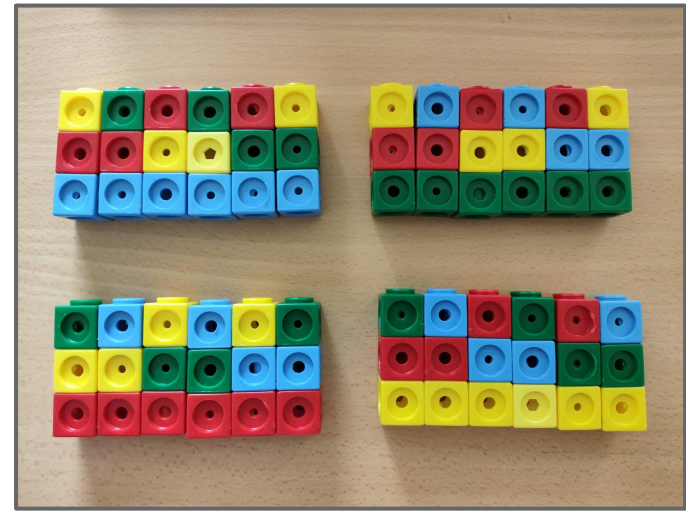
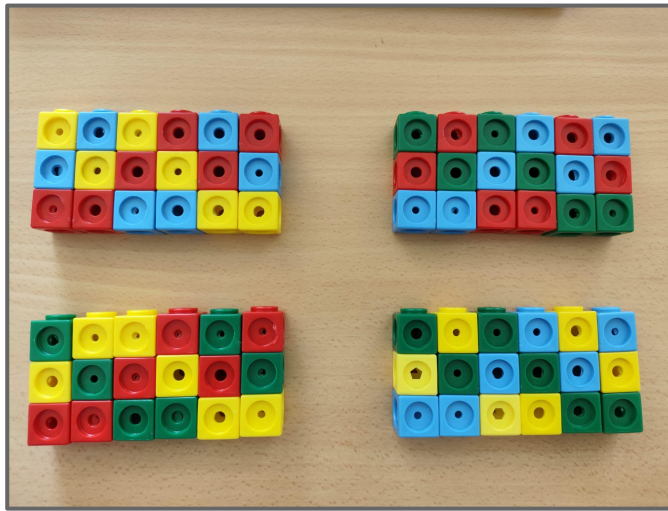
- ¿Se puede repetir color?
- ¿Importa el orden en el que disponemos los cubos?



MATERIAL "PEQUEÑOS CUBOS ENCAJABLES"

Combinando colores

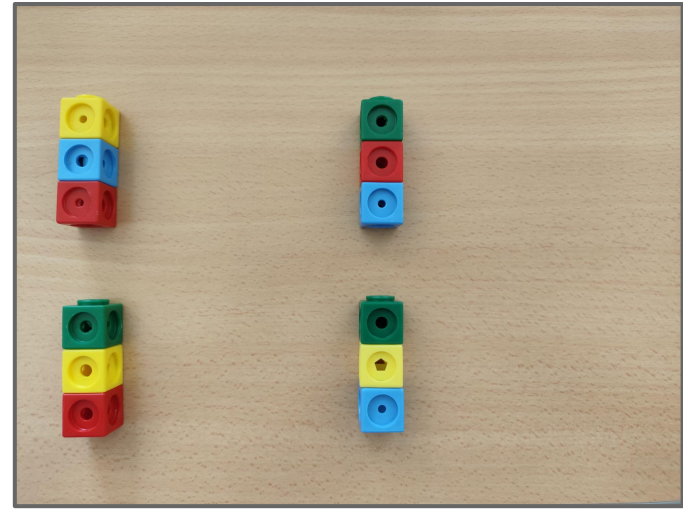
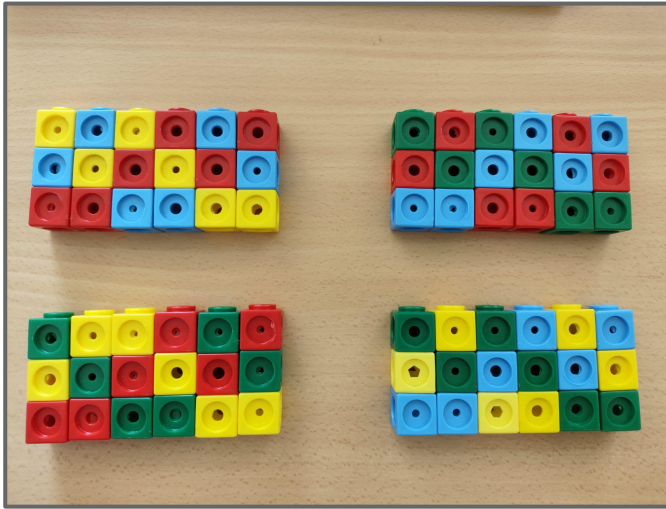
Importa el orden, no podemos repetir color. Distintas formas de resolución:



MATERIAL "PEQUEÑOS CUBOS ENCAJABLES"

Combinando colores

¿Y si no me importa el orden?



Actividad [Fitxes de colors per combinatòria - ARC](#)

MATERIAL "PEQUEÑOS CUBOS ENCAJABLES"

Otros recursos

- Triángulos de colores
- Campaña CREAMAT:
Laboratorio de matemáticas
ja.cat/LabMat



Fuente: Manel Martínez



FRACCIONES



FRACCIONES

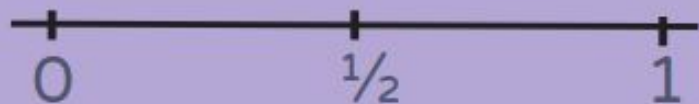
“Solo hay dos métodos para enseñar fracciones. Cortar, aunque sea mentalmente, un **pastel**, o cortar una **manzana**. Con cualquier otro método de enseñanza los alumnos preferirán sumar numeradores con numeradores y denominadores con denominadores”.

Henry Poincaré. 1854- 1912



FRACCIONES. DIFERENTES SIGNIFICADOS

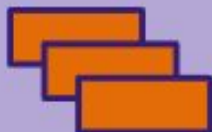
La fracción como número



La fracción como operador

$\frac{2}{3}$ de 36

La fracción como proporción



La fracción en conexión con la medida (longitud, area, ángulos...)

FRACCIONES. DIFERENTES TAREAS

**Reconocer,
identificar,
construir...**

**Equivalencia entre
fracciones
(y conexión con
decimales)**

**Ordenar, situar en la
recta numérica.
Conexión con
números decimales**

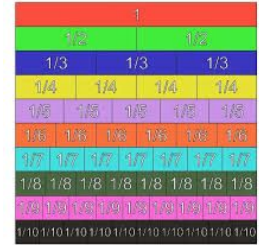
Operar

PROCESO EN LA REPRESENTACIÓN

CONCRETA: REALIDAD, DIBUJOS



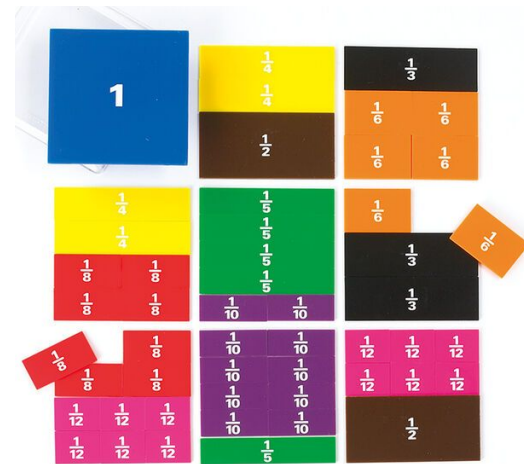
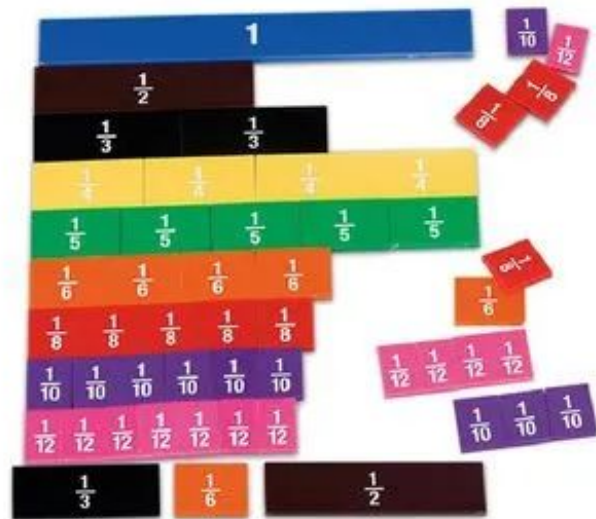
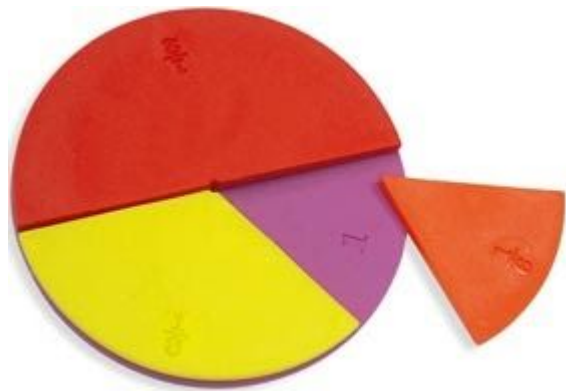
ICÓNICA: SÍMBOLOS ARBITRARIOS, MATERIALES



SIMBÓLICA: SÍMBOLOS CONVENCIONALES

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$$





MATERIALES COMERCIALES ESPECÍFICOS: CÍRCULO, MURO Y CUADRADO

RECTA NUMÉRICA VACÍA



Con una tira de papel
y una pinza:

Donde situo $1/2$? $3/4$?
 $9/10$? $1/8$? ...

RECTA NUMÉRICA VACÍA



Toma la tira y dóblala por la mitad. Escribe la fracción que representa. Vuévela a doblar. Qué tienes? Escribe cada fracción en su sitio. Vuévela a doblar...



FLORENCE
PER A LA MELIORA DE LES MATEMÀTIQUES

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
i Formació Professional



MÀ DRETA, MÀ ESQUERRA



QUÈ ÉS MÉS GRAN?



$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{10}$$



MÀ DRETA, MÀ ESQUERRA



$$\frac{5}{6}$$



Menys que mig, o més que mig?



FEM PILES



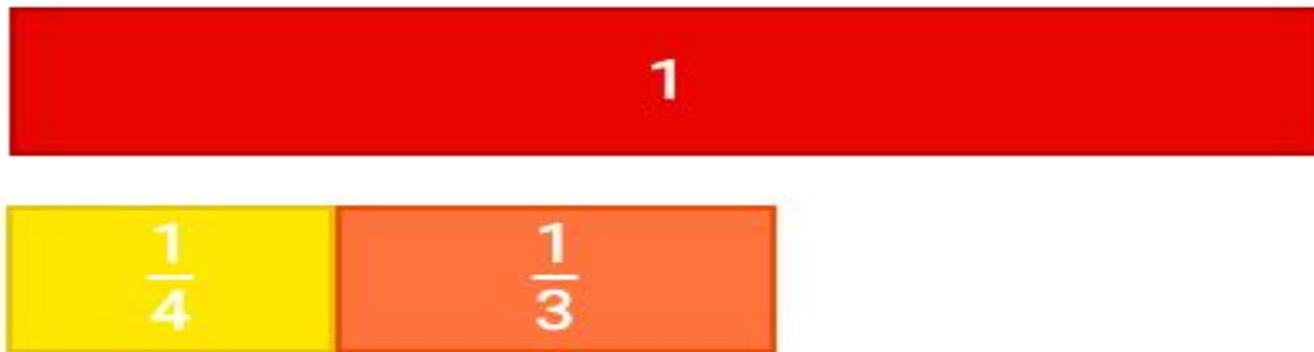
Una quarta part dels nens
de la classe porten ulleres.

La resta no en porten.

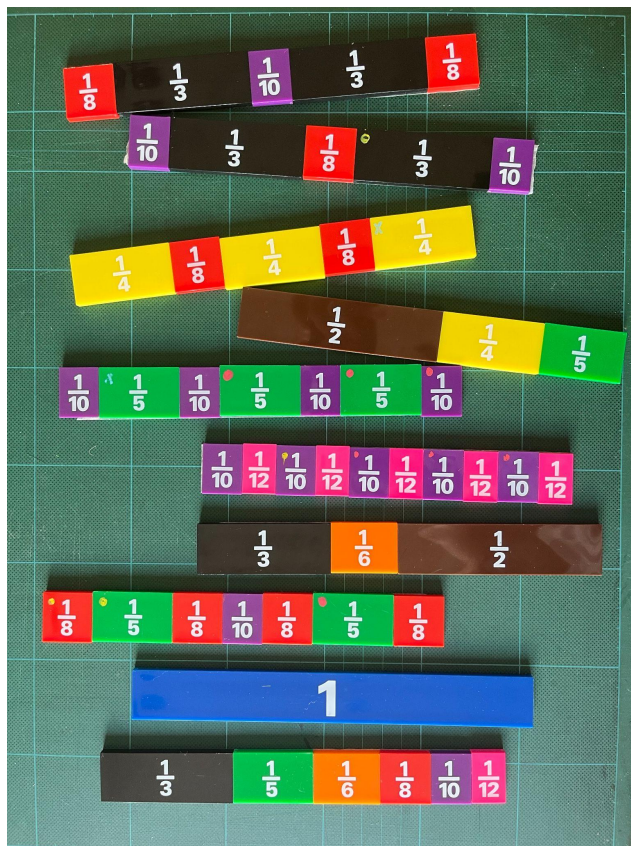
Representa: Una quarta parte de los alumnos llevan gafas.
El resto, no.



A partir de cada imatge, digues quines fraccions representa cada color.



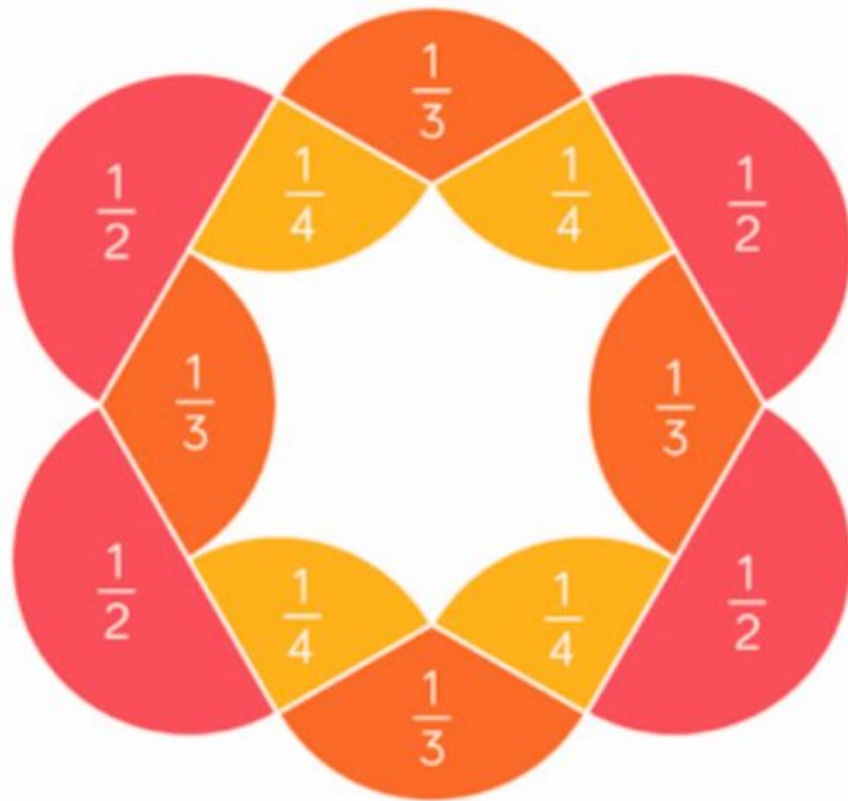
¿Más que la mitad? ¿Menos que la mitad?



Cual es mayor? la primera o la segunda?

Son uno? más que uno? menos que uno?

La última es una idea de Tocamates. Sumando fracciones, aquí sí que necesitamos el mcm. El resultado da uno? No! Da **121/120**



¿Cuánto suma la imagen?



Idea original: Narcís Pí. Escola Migdia de Girona.

BANDERAS



Austria



Nigeria

BANDERAS



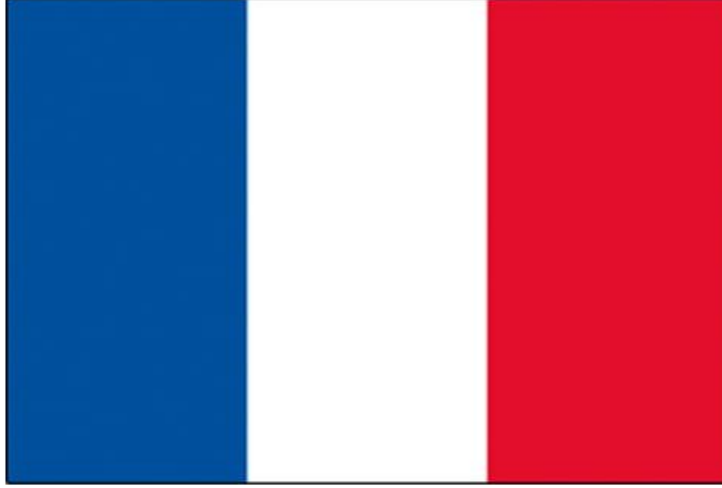
Polonia



Bahrein



BANDERAS



BANDERAS



Colombia



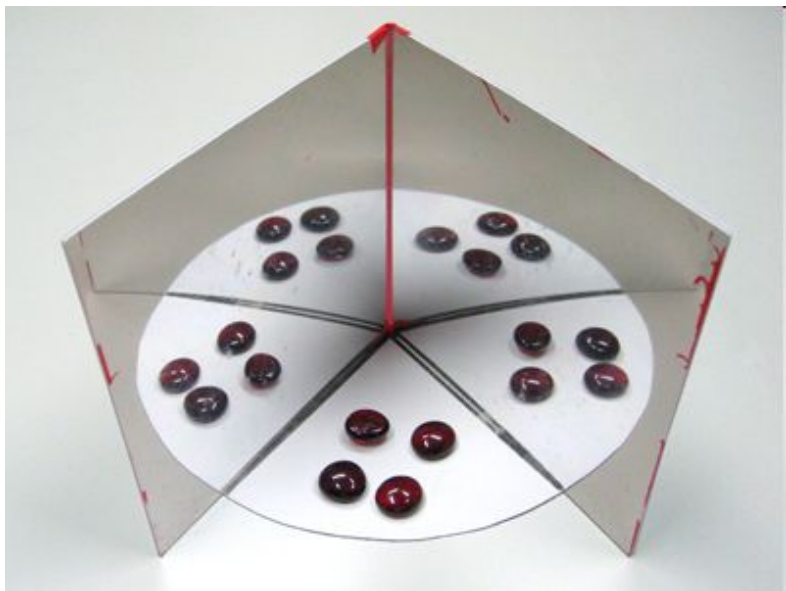
Mauricio



BANDERAS

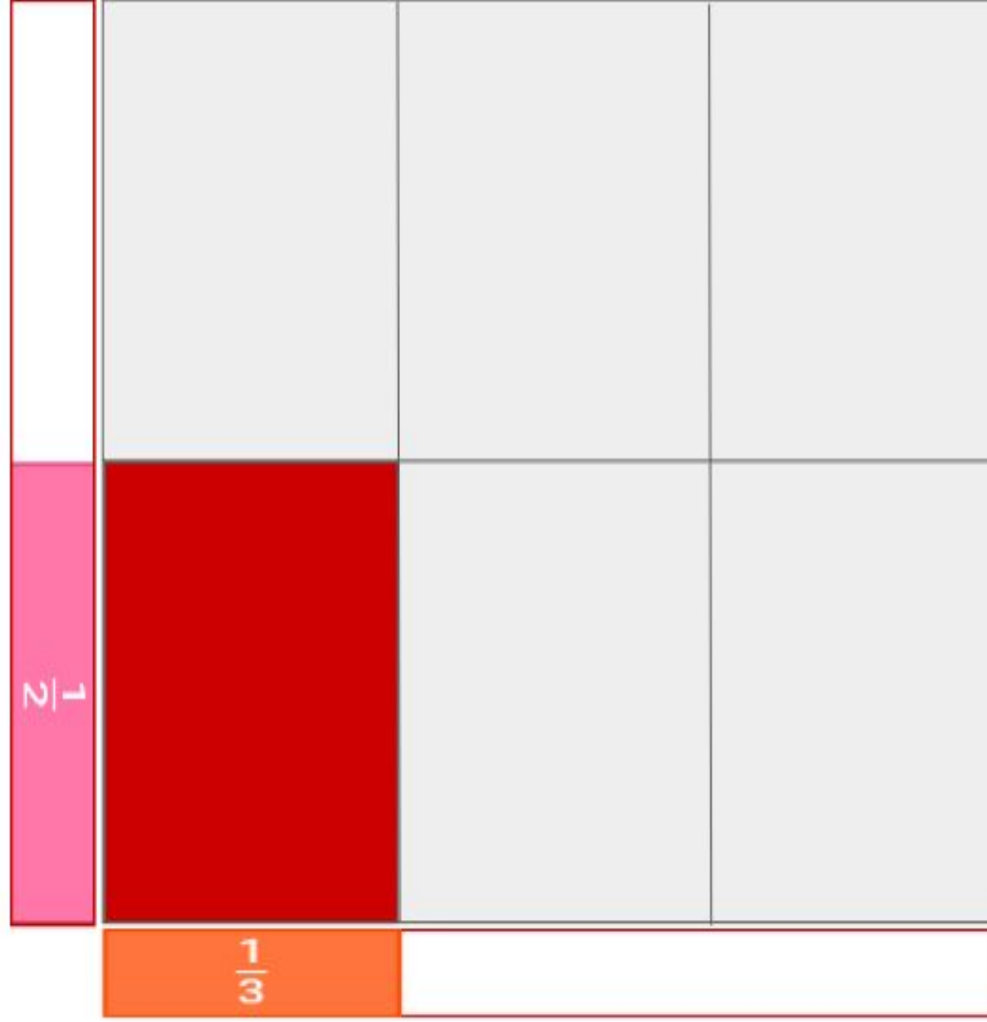


República Checa

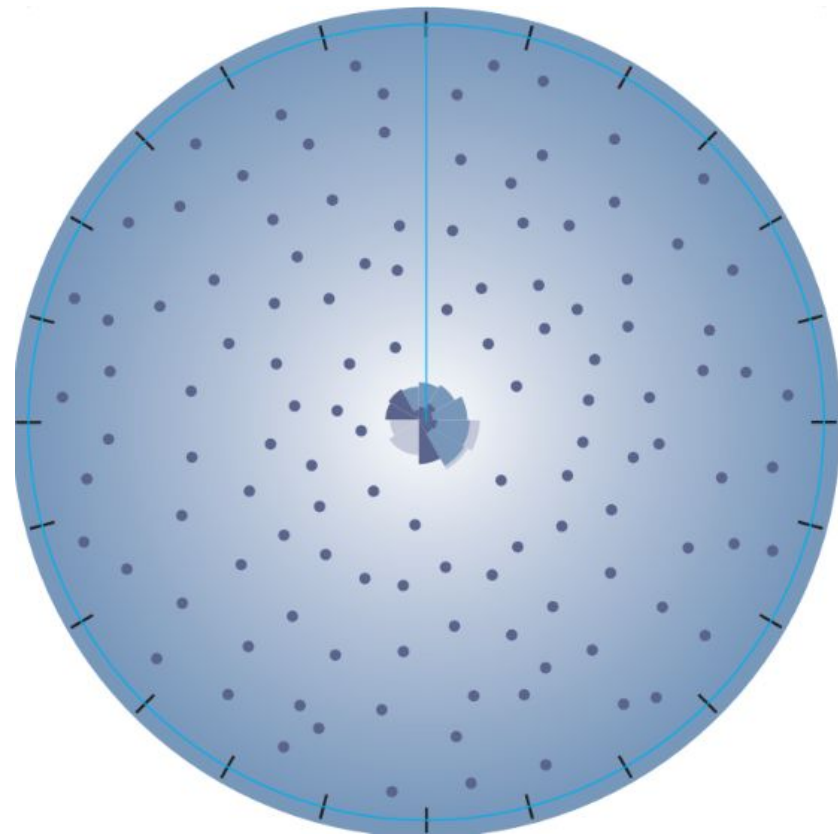
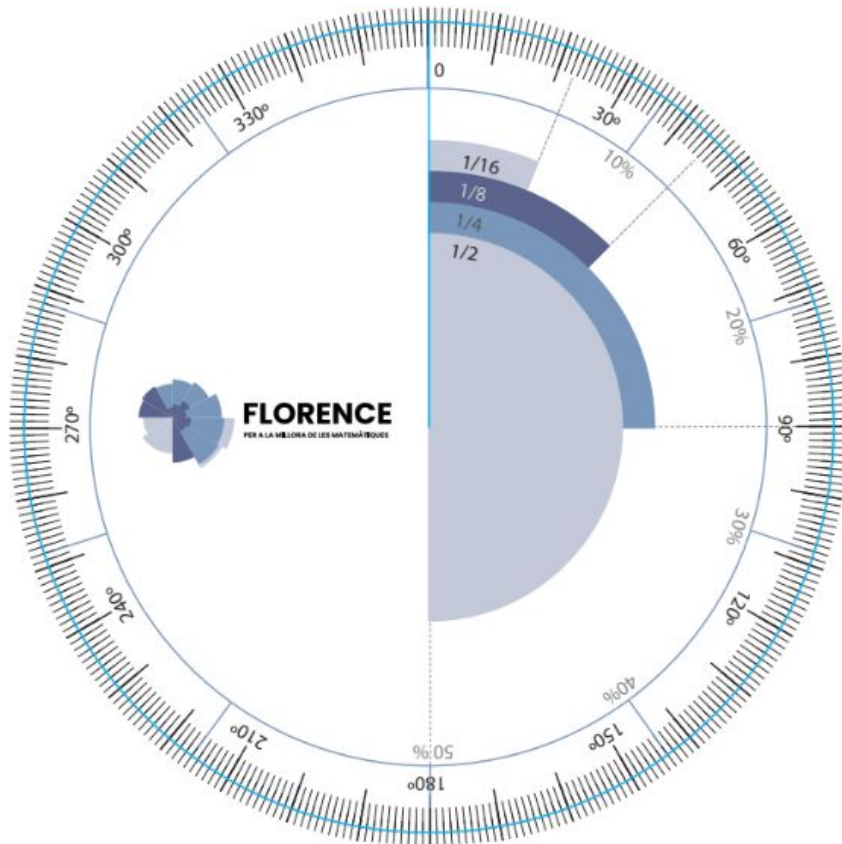


¿Cuál es el
número del que $\frac{2}{5}$
es 8?

Maria Antonia Canals



Modelo
rectangular en el
producto de
fracciones



CÍRCULO DE FRACCIONES. CONEXIONES

ACTIVIDADES QUE AYUDAN A HABLAR DE FRACCIONES





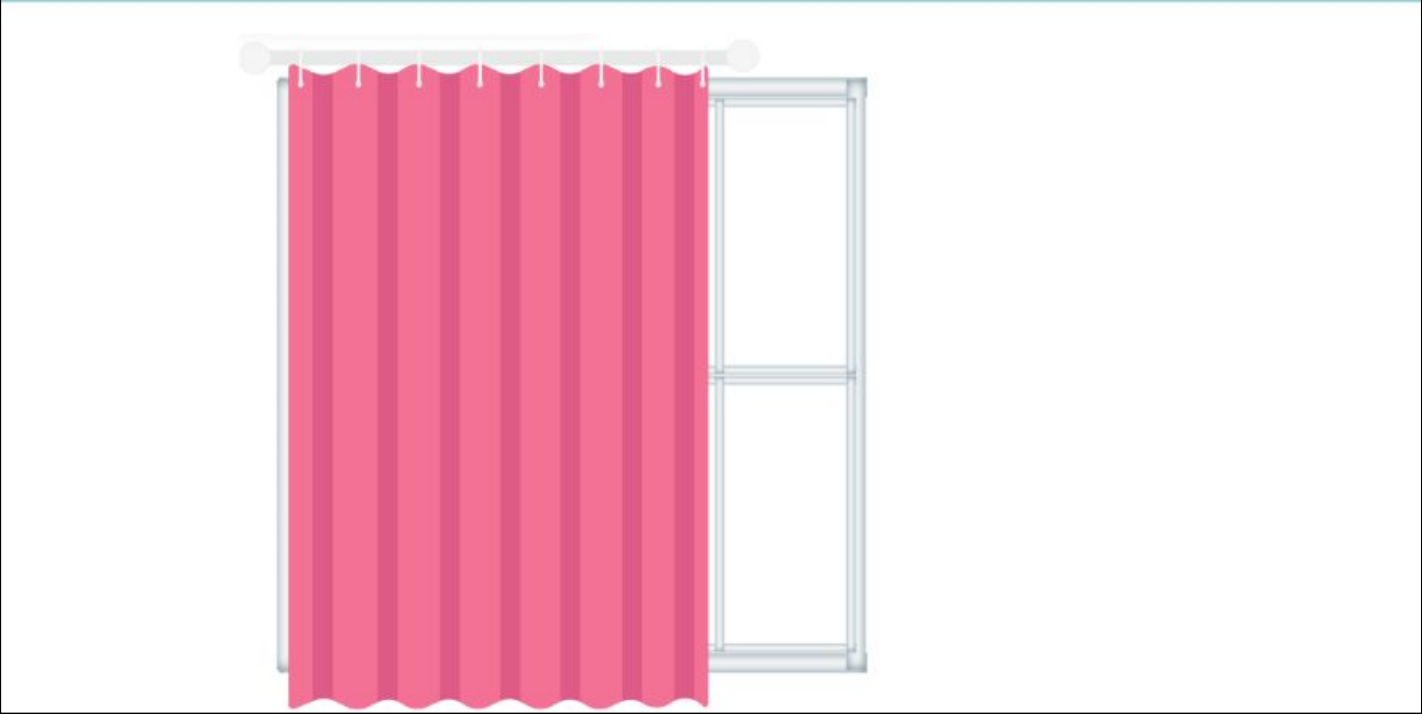
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CANTABRIA
C/ SANTIAGO DE CALIXTO, 150
41013 BILBAO (VIZCAYA)
944 22 00 00
www.itec.es

HA SORTIT... LA MEITAT DEL TREN





VEIG 1/4 PART DE LA FINESTRA...



Veo la cuarta parte de la ventana. ¿Cuántos cristales tiene?

VEIG $\frac{2}{3}$ DE LA VALLA...



Vejo $\frac{2}{3}$ de la valla. ¿Cuántas maderas tiene?

EL TOT I LES PARTS



Quim sabe que $\frac{2}{3}$ de estos 120 cubitos son de color azul i el resto són grises. ¿Cuántos **cubitos azules** hay?



.....CUBITOS TOTALES

.....AZULES

GRISES

Diagrama PARTE-TODO o modelo de barras de Singapur.

OTROS RECURSOS



PRÁCTICA REPRODUCTIVA

VS

PRÁCTICA PRODUCTIVA



Nombre: _____

Fecha: _____

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{7} =$$

$$\frac{5}{4} - \frac{4}{9} =$$

$$\frac{6}{7} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{7} =$$

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{4} =$$

$$\frac{6}{7} - \frac{7}{6} =$$

$$\frac{7}{3} - \frac{2}{8} =$$

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{5} =$$

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{6} =$$

$$\frac{7}{4} - \frac{5}{4} =$$

$$\frac{5}{4} - \frac{5}{9} =$$

$$\frac{7}{4} - \frac{6}{9} =$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{3} =$$

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{6} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{8} =$$

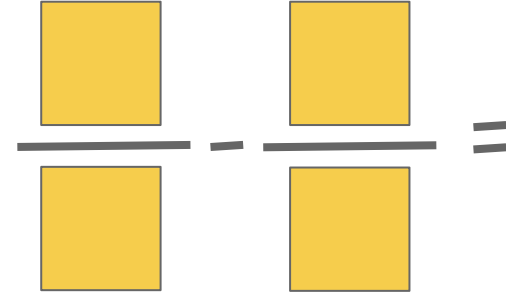
$$\frac{7}{5} - \frac{3}{8} =$$

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{9} =$$

$$\frac{2}{5} - \frac{4}{6} =$$

$$\frac{4}{5} - \frac{6}{9} =$$

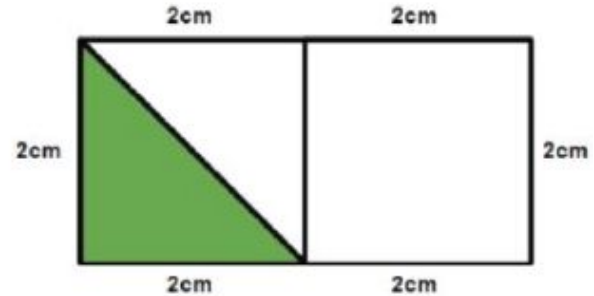
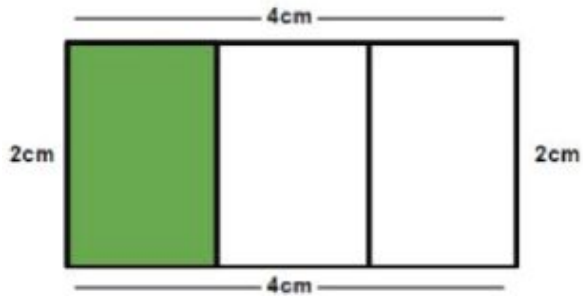
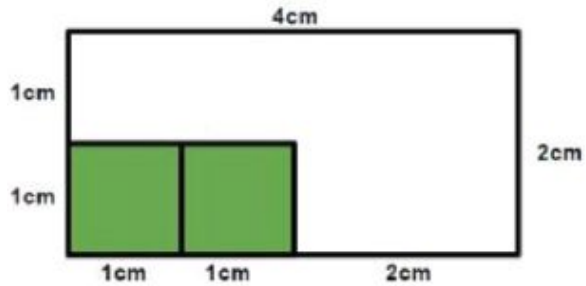
$$\frac{1}{5} - \frac{3}{4} =$$



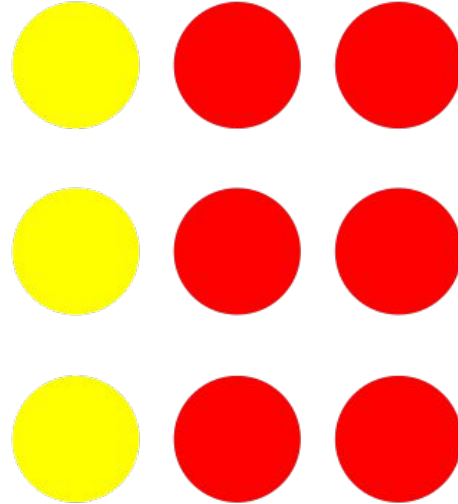
Resta de fracciones

Si distribuimos un 2, un 3, un 4 y un 5 en los cuadrados de la imagen ¿cual es el mayor resultado que podemos obtener?

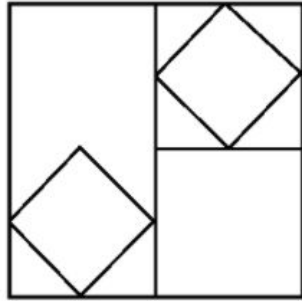
LAS QUELIS... DE FRACCIONES



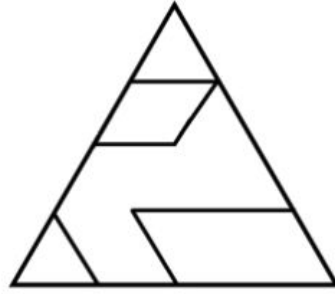
IGUALES PERO DIFERENTES... DE FRACCIONES (PROPORCIONES)



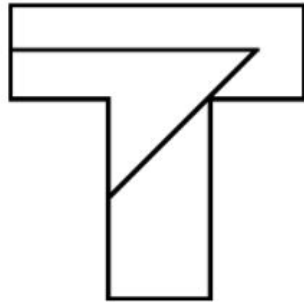
FRACTION TALKS



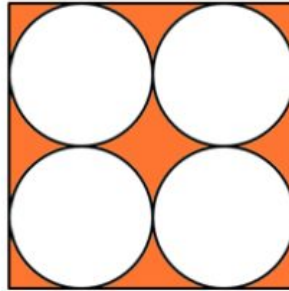
SQUARES



TRIANGLES



POLYGONS



MISCELLANEOUS



PHOTOS

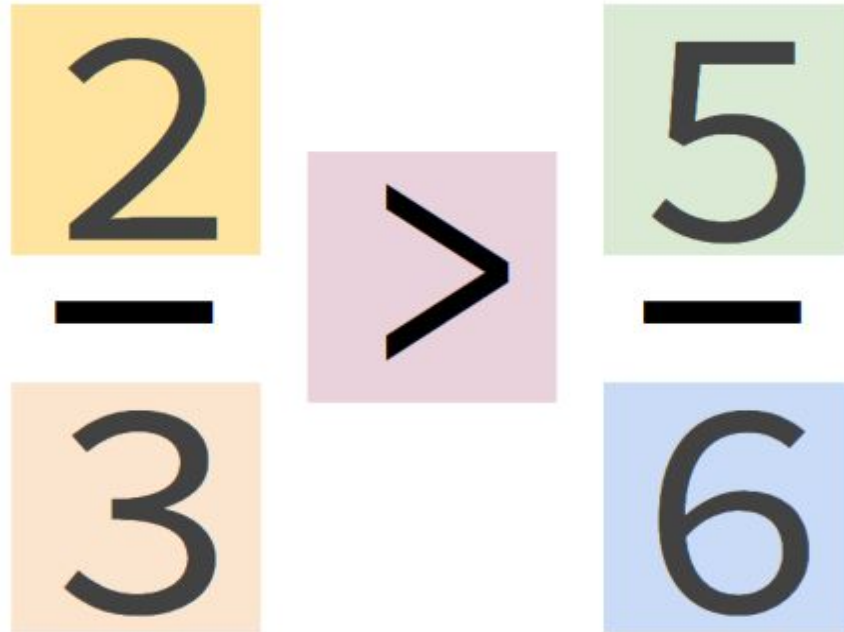




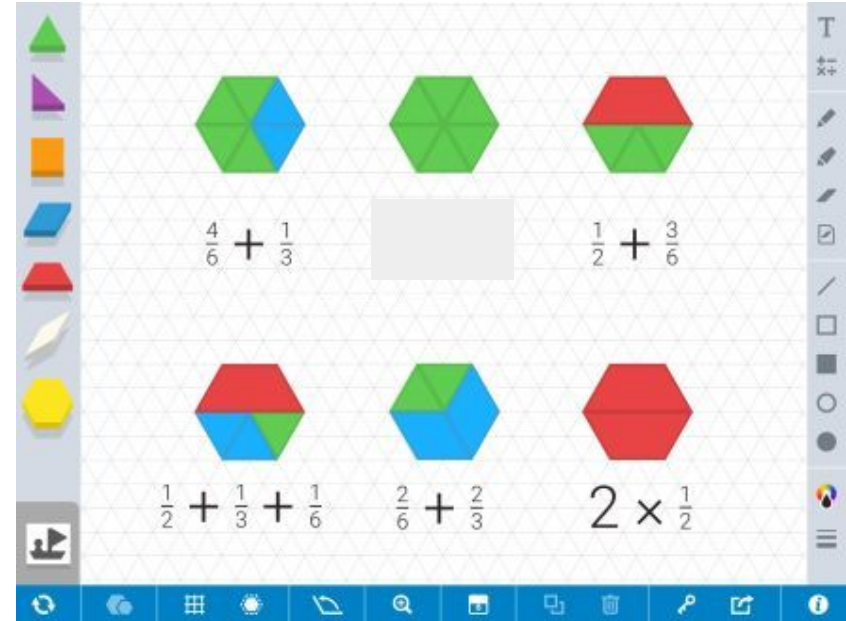
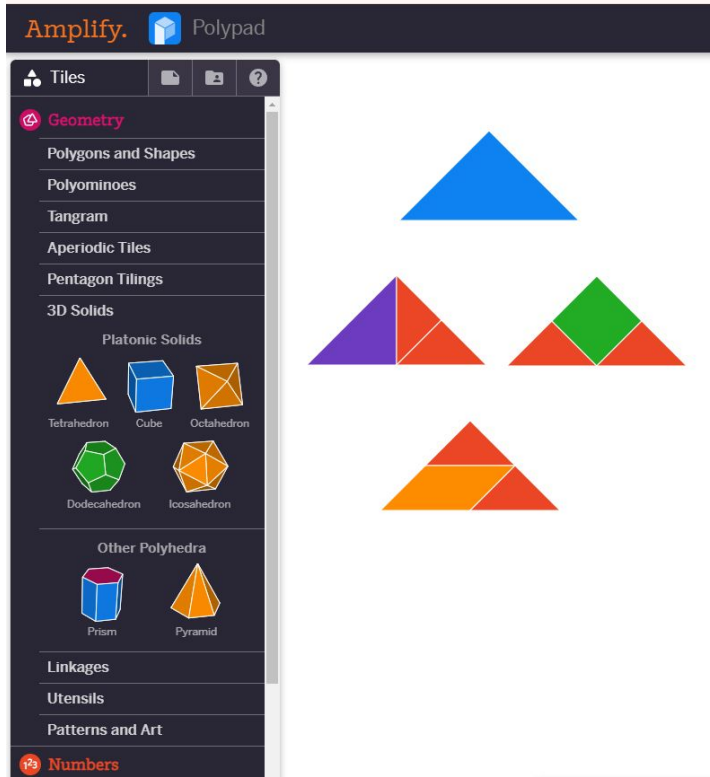
FRACTION TALKS

Pequeñas tareas que invitan a la conversación.

Corrige el error.



EL USO DE MATERIALES EN FORMATO DIGITAL



polypad.amplify.com/p

www.mathlearningcenter.org

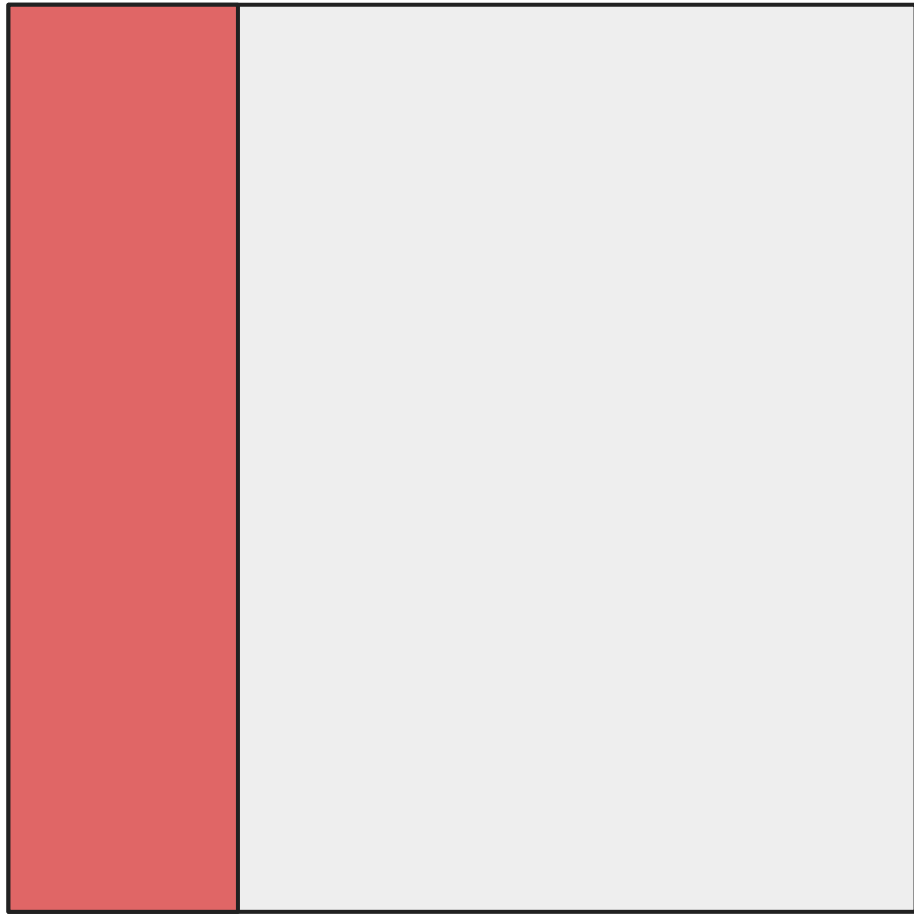
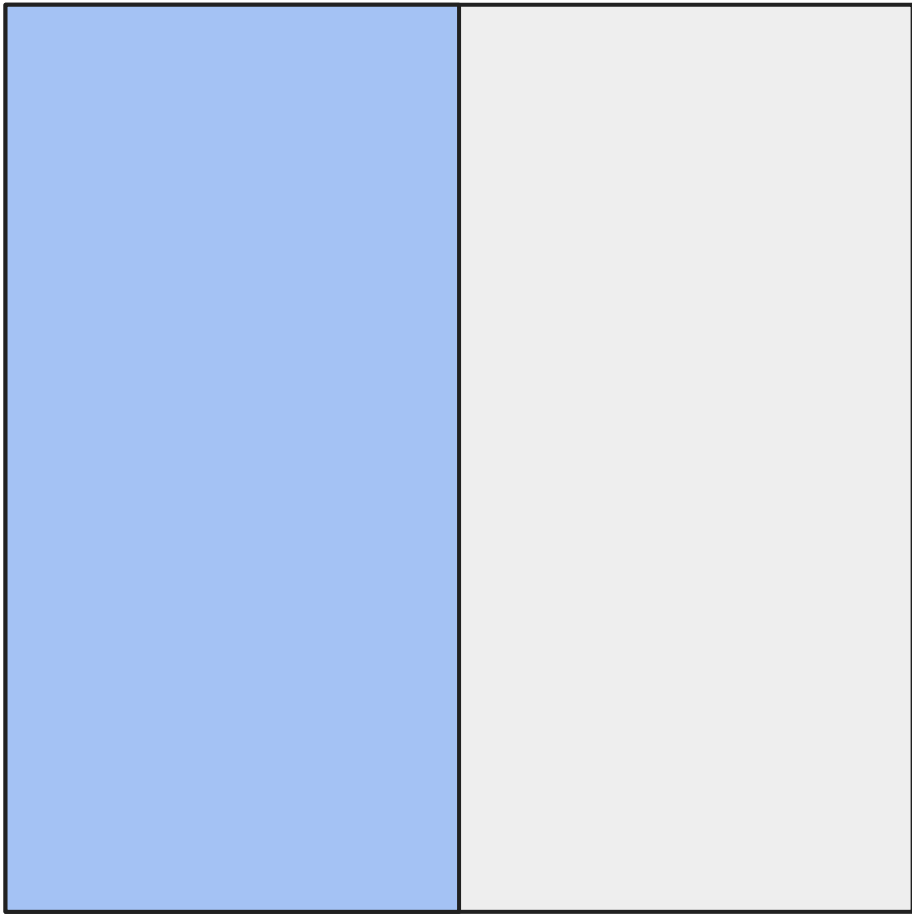
ACTIVIDADES QUE INVITAN A INVESTIGAR CON FRACCIONES

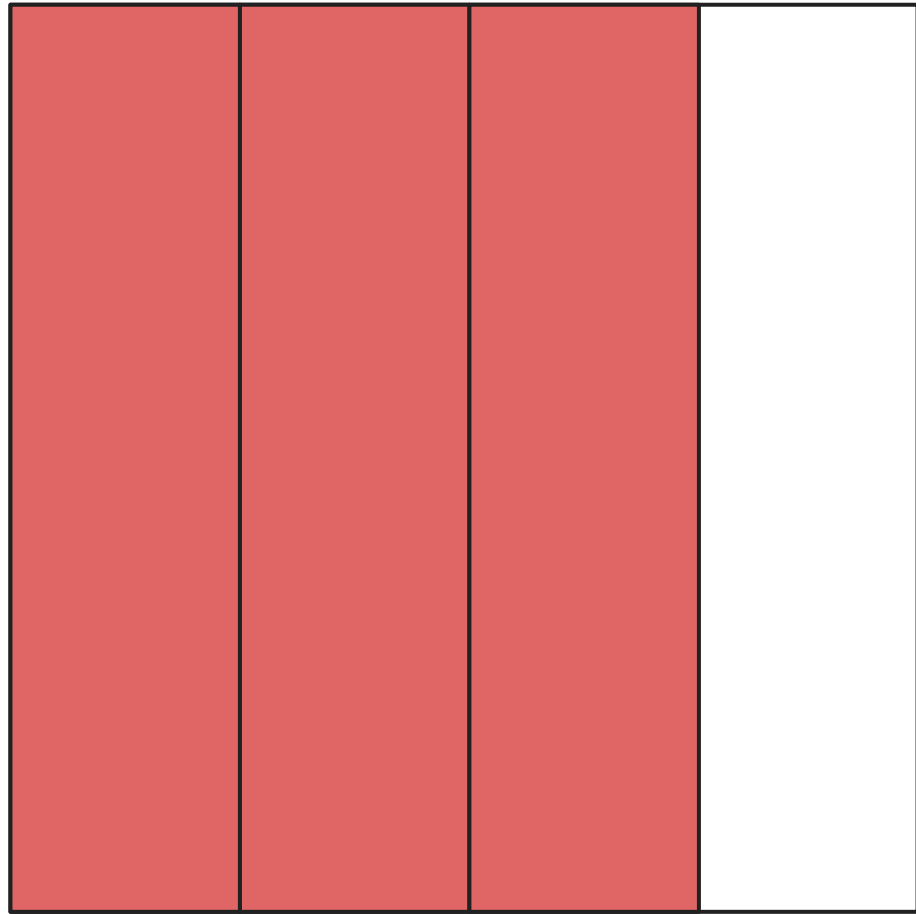
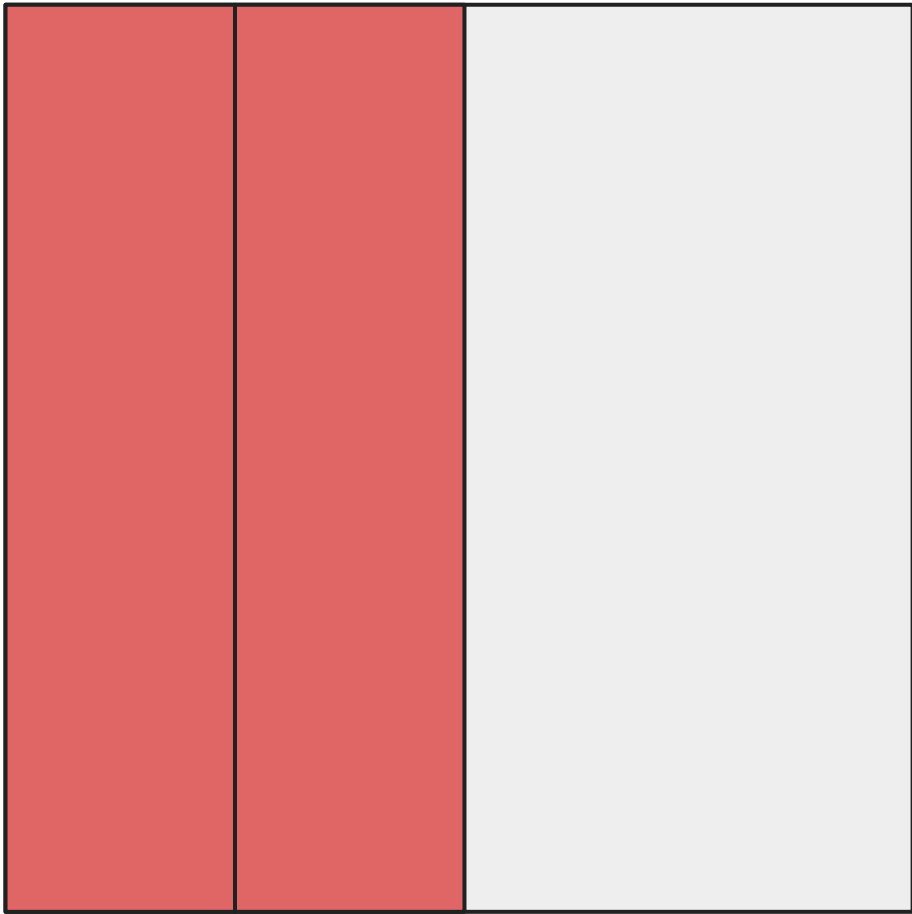
- Libros: Investigando las matemáticas. Fisher i Vince. 1990. Ediciones AKAL. (Descatalogado)
- Un buen ejemplo: El pastelero singular
- Web del creamat. Fracciones ja.cat/LABMAT

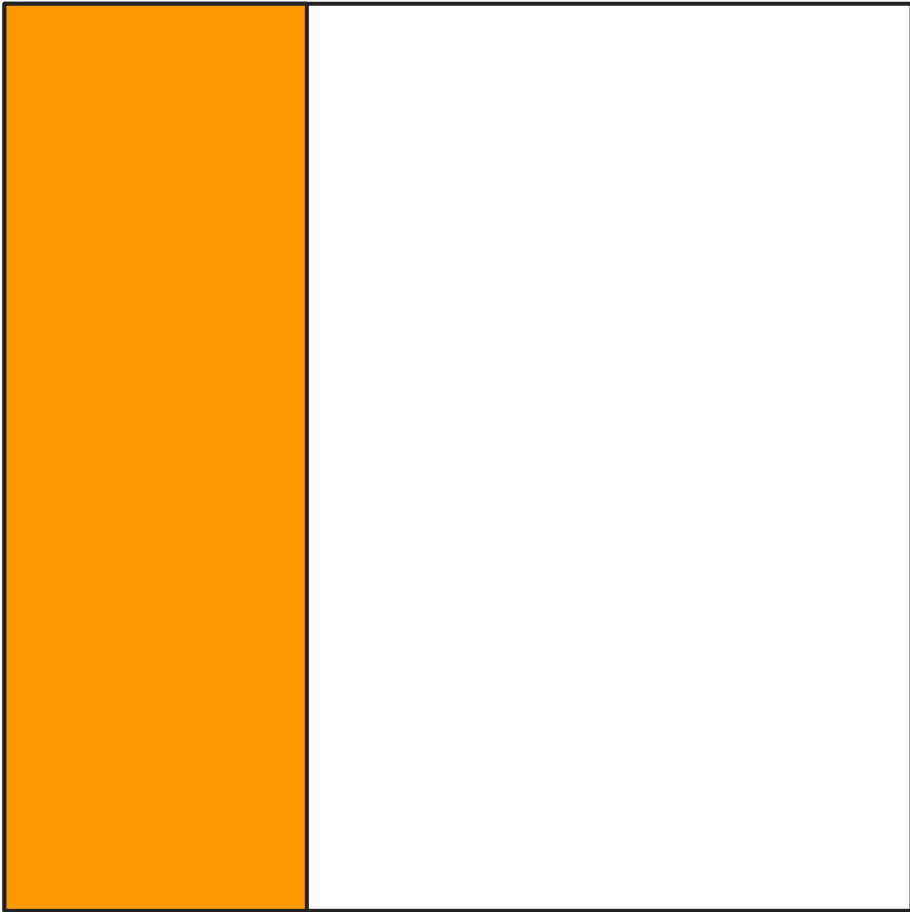
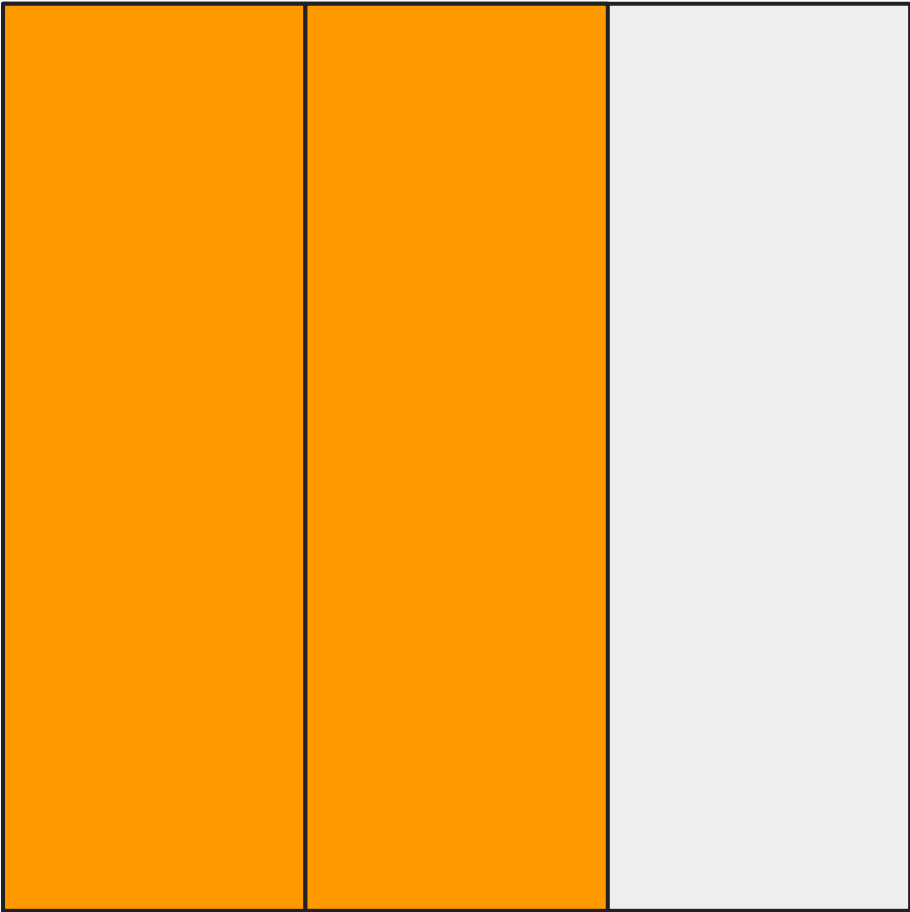


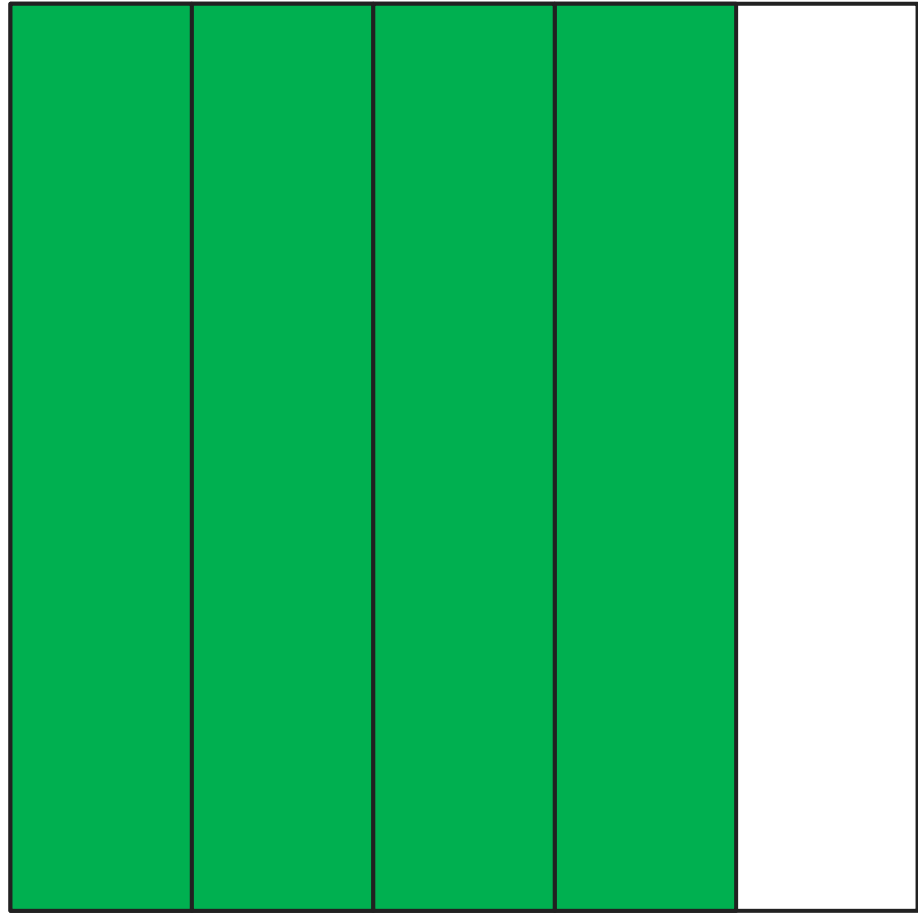
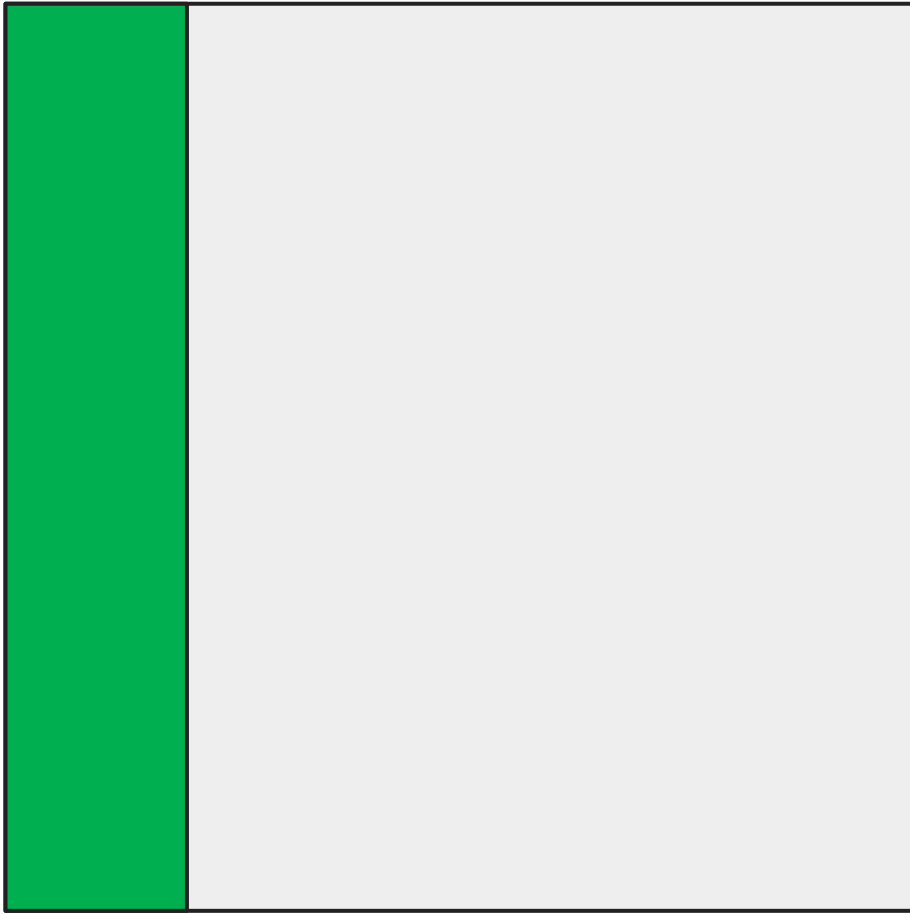


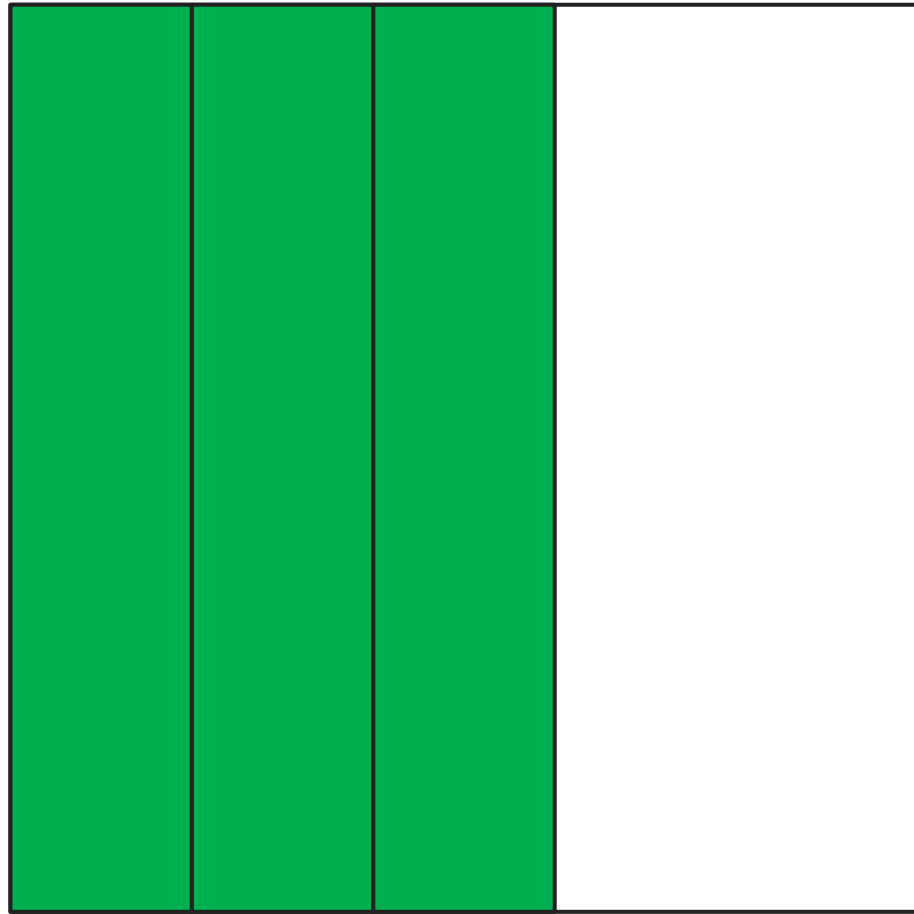
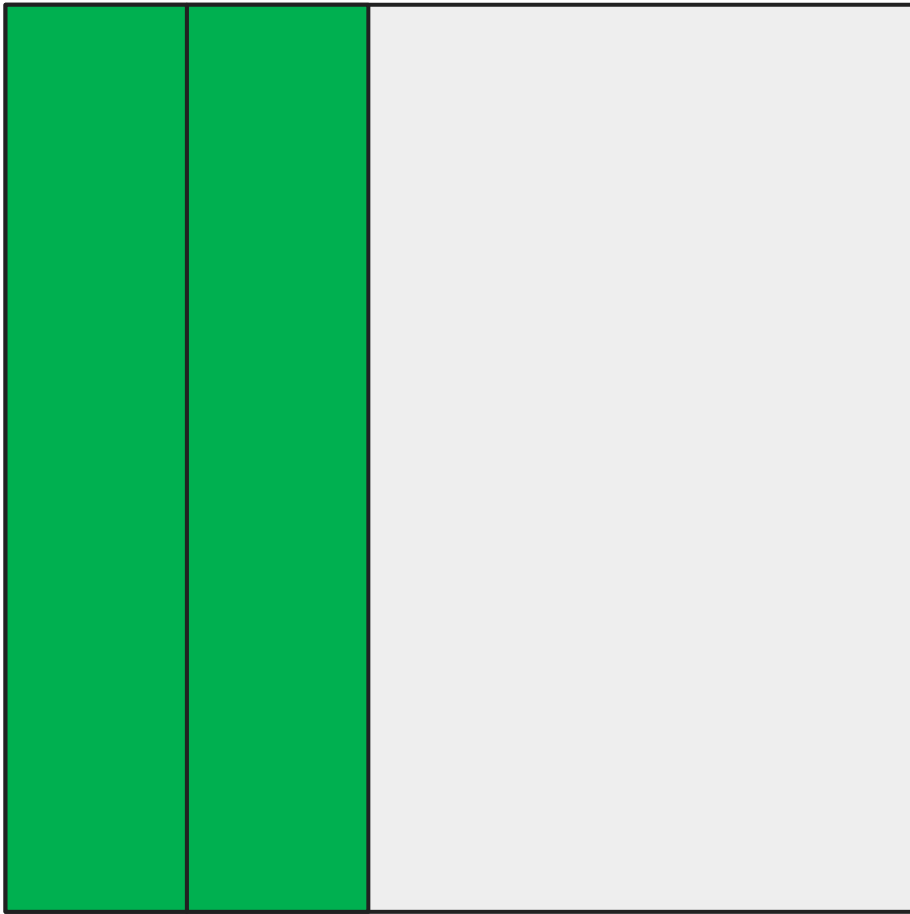
VIDEOS DE FRACCIONES. CANAL CREAMAT. LISTA FRACCIONES

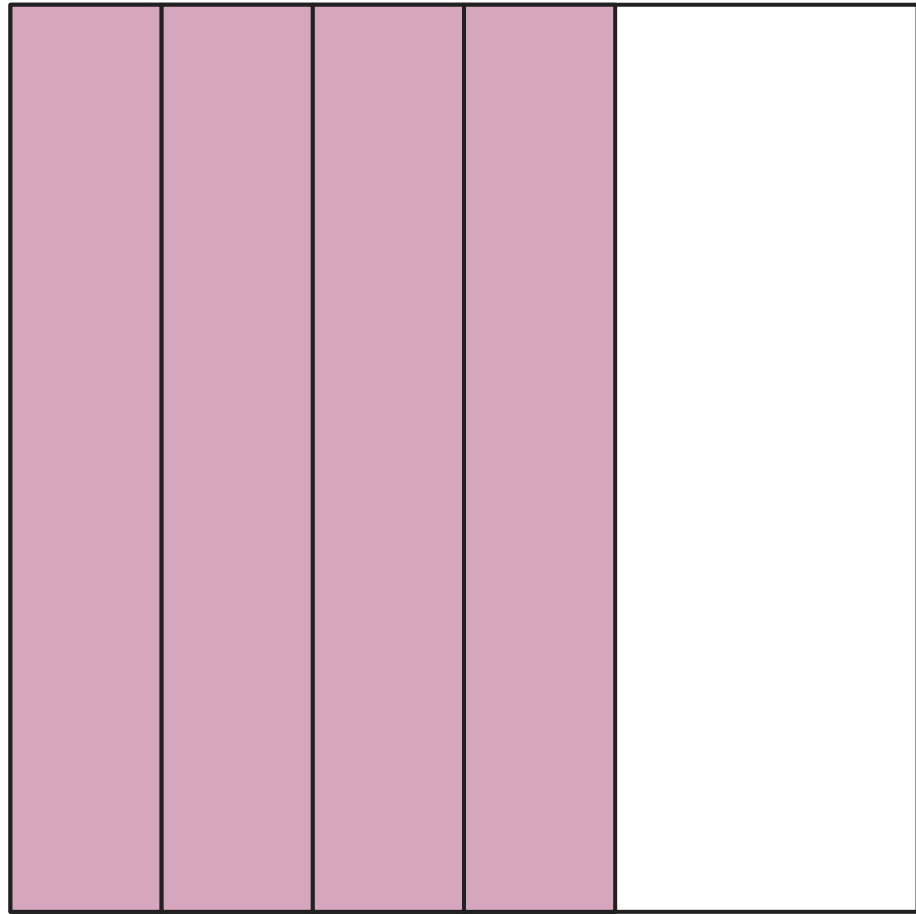
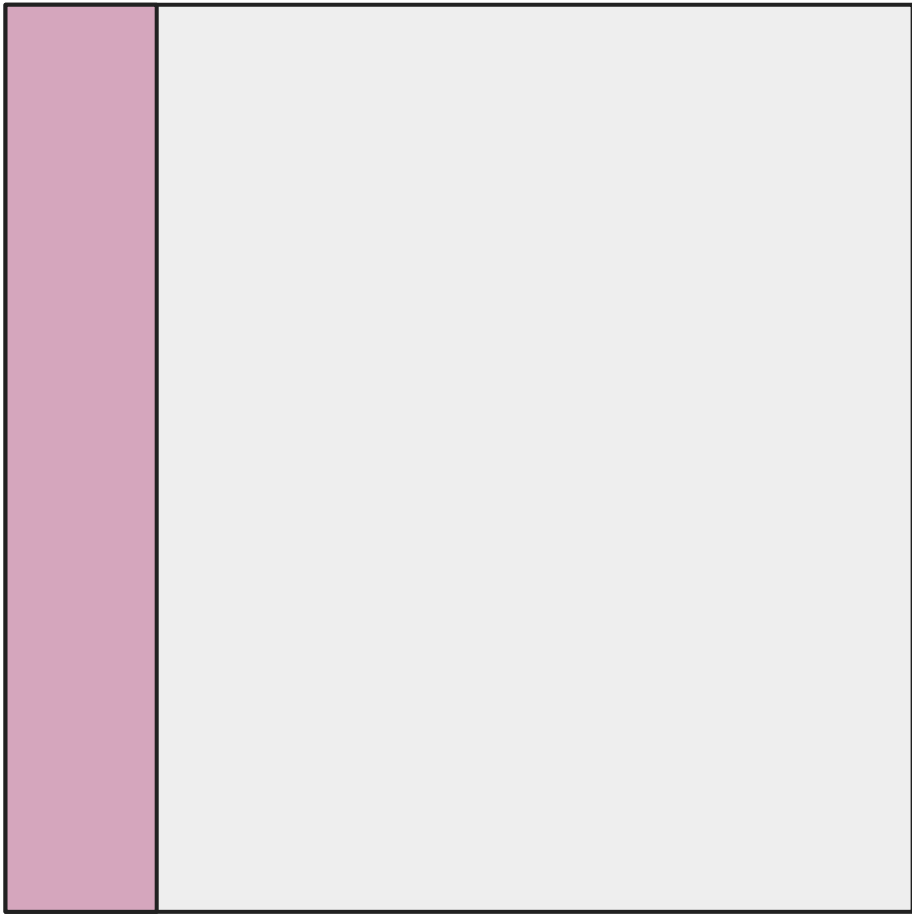


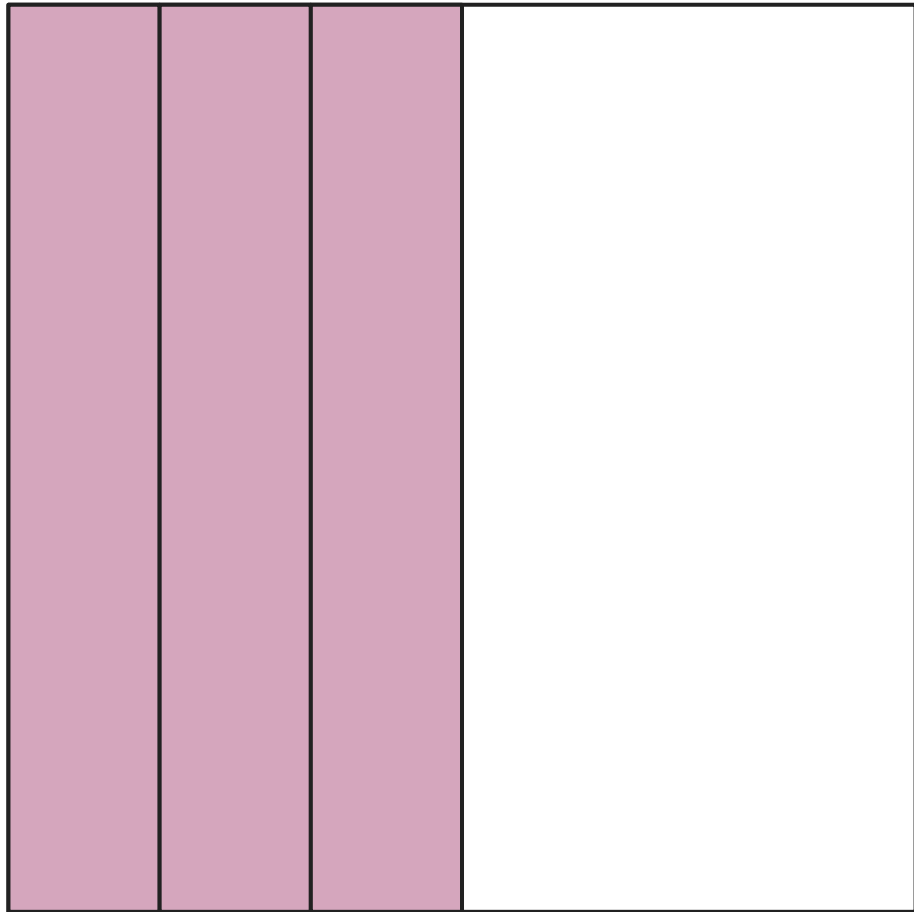
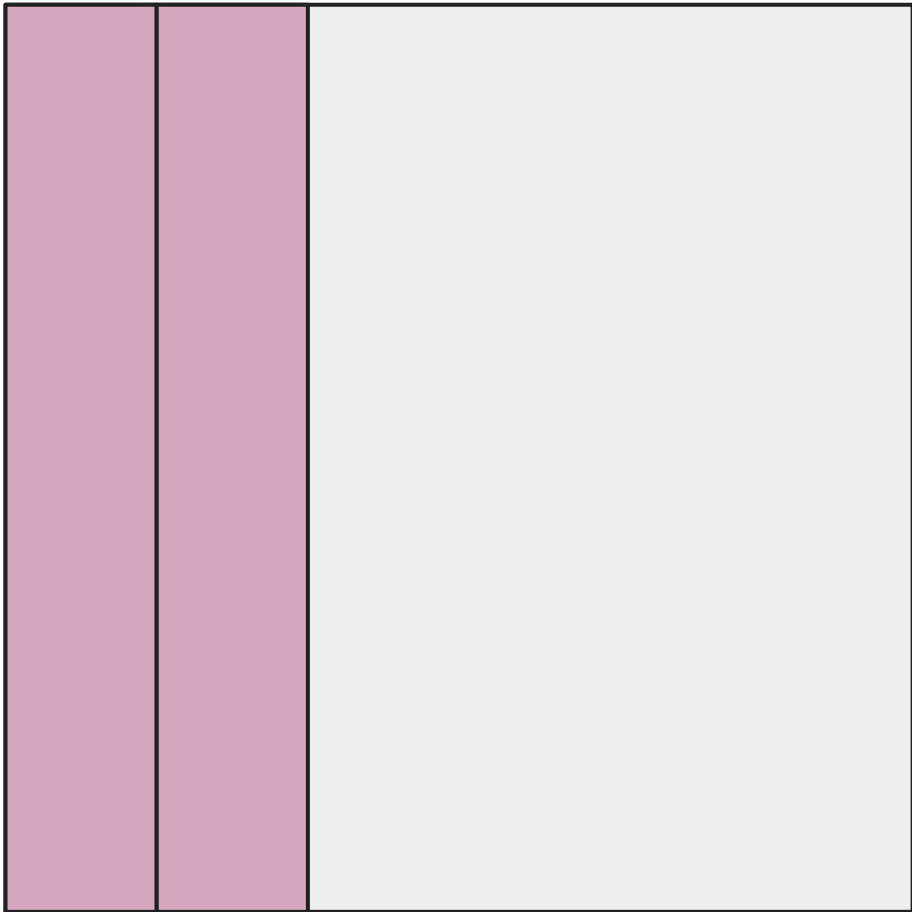


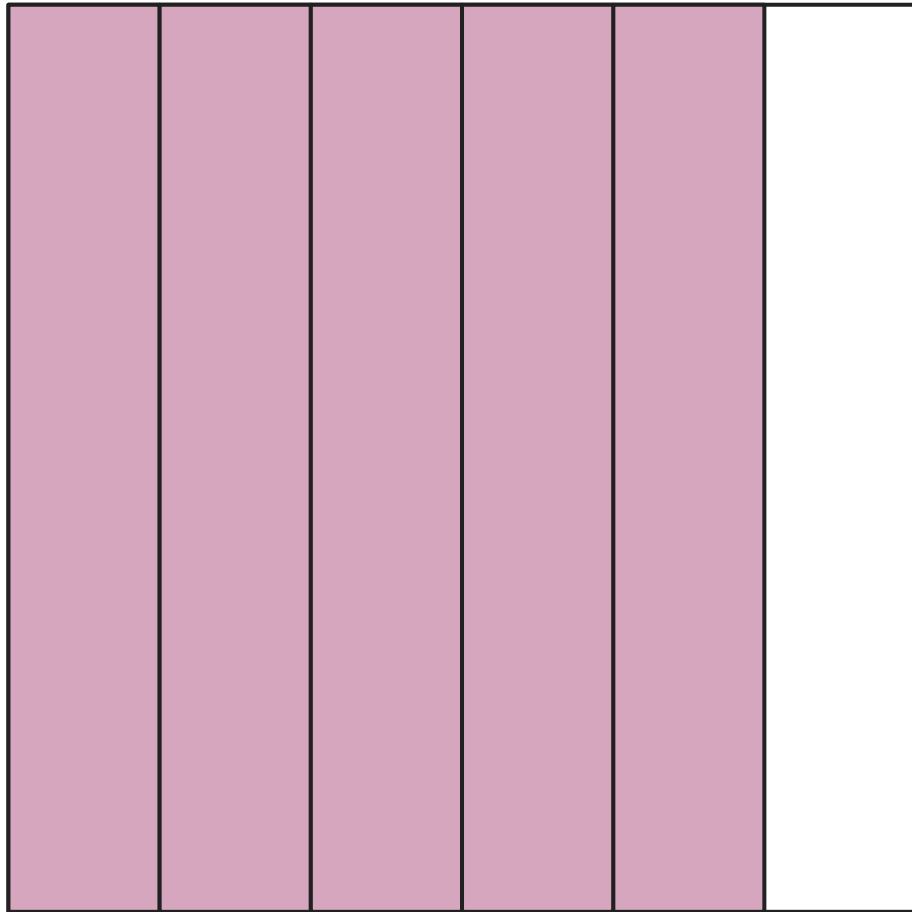
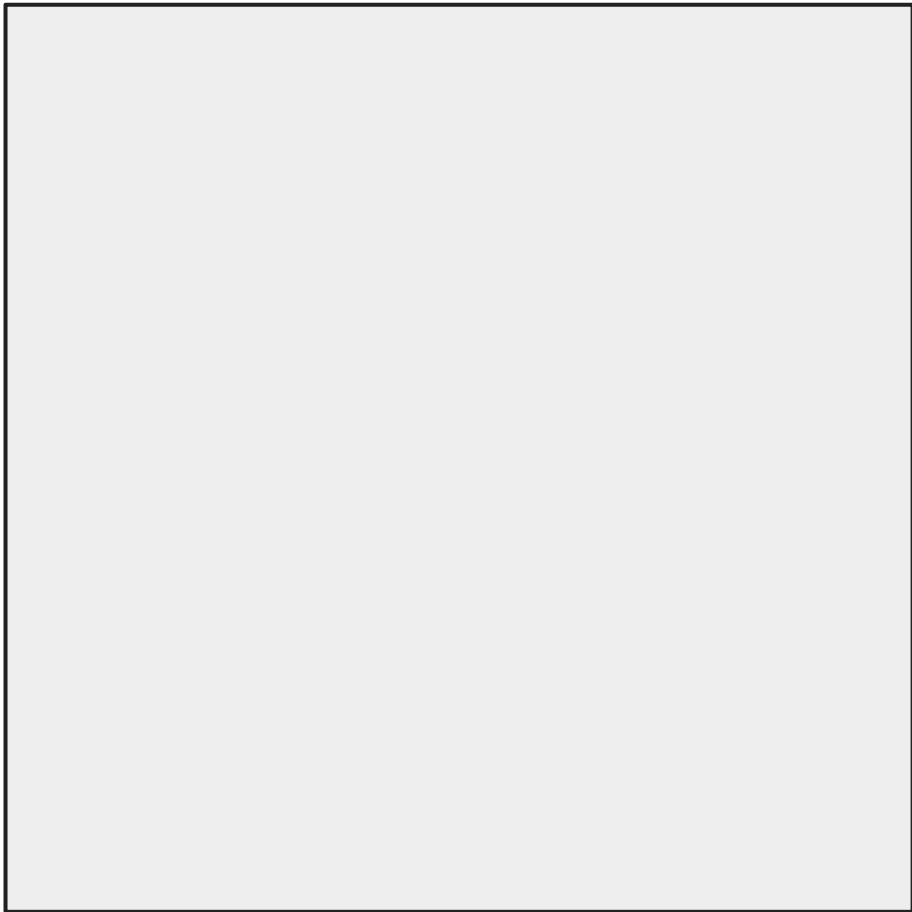














PCT de refuerzo de la
**COMPETENCIA
MATEMÁTICA**

Desarrollo profesional del profesorado de
MATEMÁTICAS



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL
Y DEPORTES



PCT de refuerzo de la
COMPETENCIA
MATEMÁTICA