

Sentido algebraico en las aulas de primaria y secundaria: mucho más que la x y la y

María C. Cañadas
mconsu@ugr.es
Universidad de Granada

Congreso

«Avanzando en el Refuerzo de las
Competencias Lectora y Matemática»



Línea de trabajo: pensamiento algebraico en educación infantil, primaria y secundaria

Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.

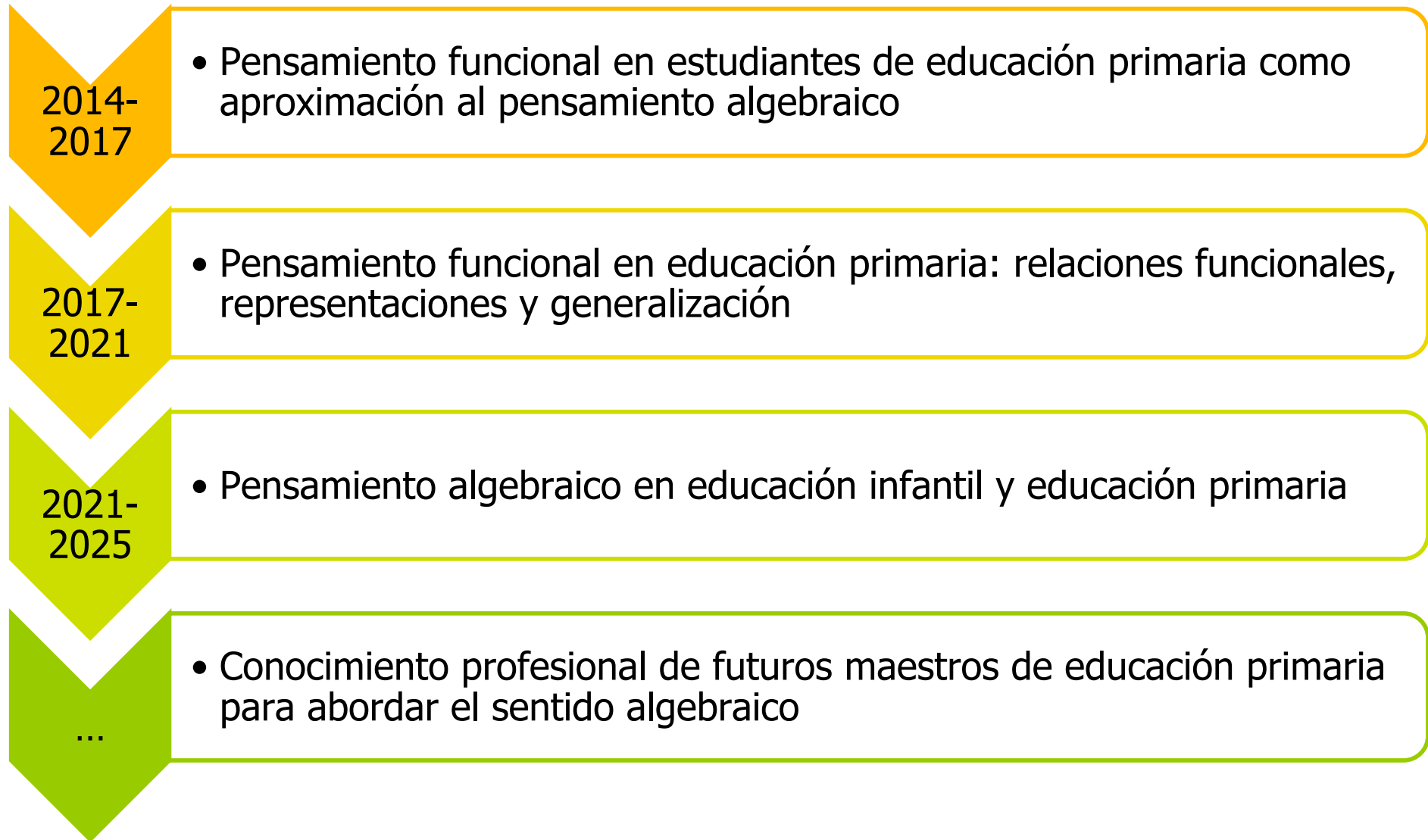
Encarnación Castro (1995)

Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.

María C. Cañadas (2007)

Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.

Marta Molina (2007)



Nociones clave



Dos ámbitos de interés conectados

- Cómo podemos integrar oportunidades para el pensamiento algebraico en el currículo de primaria para preparar a los estudiantes para las matemáticas de los siguientes cursos.
- Cómo los maestros de primaria y los profesores pueden transformar sus recursos y su forma de enseñar para que sean efectivos y eficaces en la enseñanza del álgebra.

Educación Primaria y Educación Secundaria

Sentido
numérico

Sentido
algebraico

Sentido de
la medida



Sentido
estocástico

Sentido
socioafectivo

Sentido
espacial

¿Ha llegado a las aulas de Educación Primaria?

¿Cómo se trabaja en las aulas de educación secundaria?

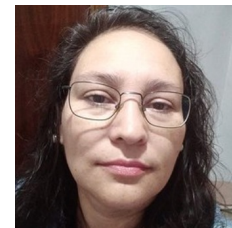
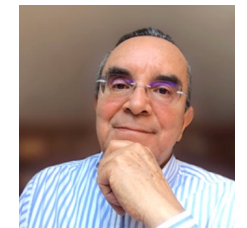
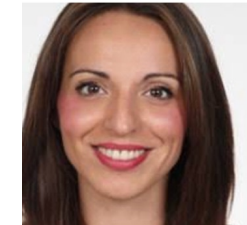
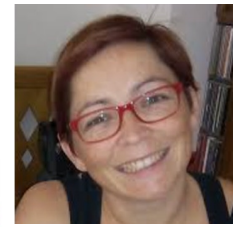
¿Y los libros de texto?



Los y las docentes tenemos mucho por hacer...

www.pensamientoalgebraico.es

El equipo



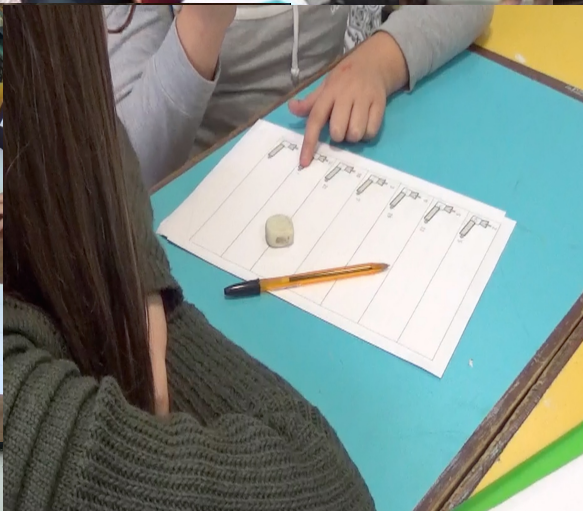
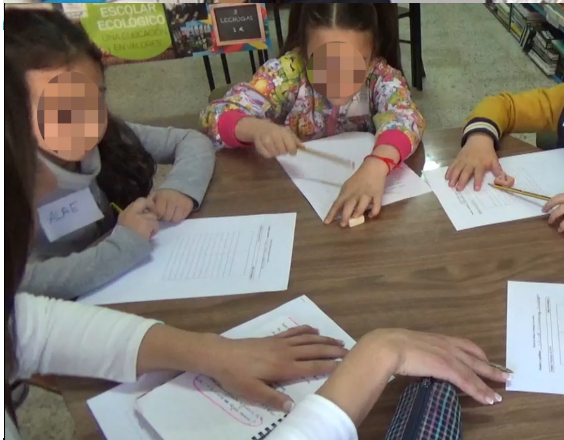
TAREAS DEL EQUIPO

- ❑ *Diseño de tareas*
- ❑ *Estudiantes sin conocimientos previos*
- ❑ *Sin instrucción directa. Guía de profesor-investigador*
- ❑ *Problemas contextualizados*
- ❑ *Preguntas desde casos particulares hacia la generalización*
- ❑ *Uso de materiales manipulativos*
- ❑ *Trabajo individual, grupos pequeños y gran grupo*
- ❑ *Mantener la normalidad en el aula*



Centros diferentes :

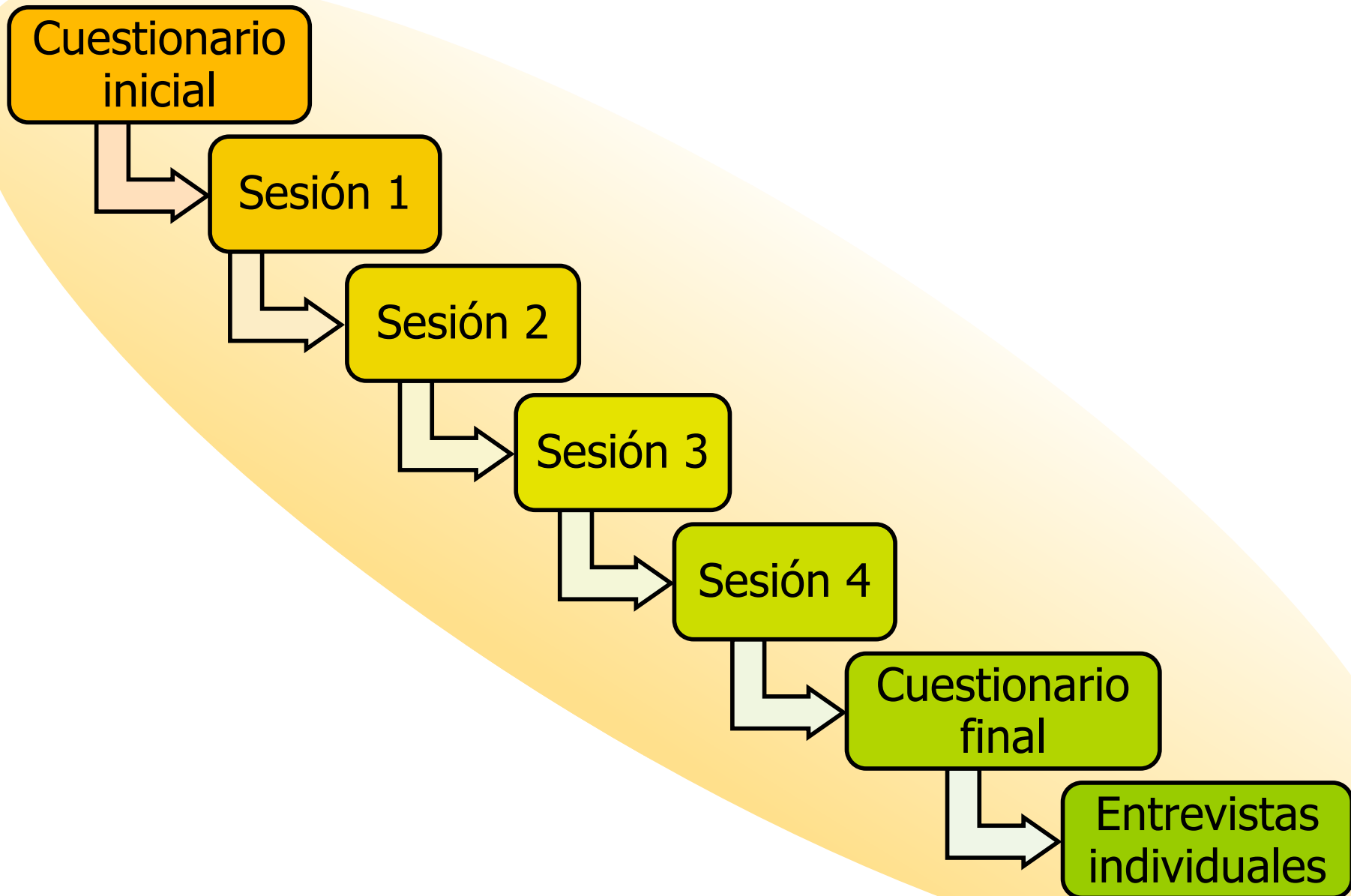
- ✎ Privado-cooperativa
- ✎ Centros concertados
- ✎ Centros públicos

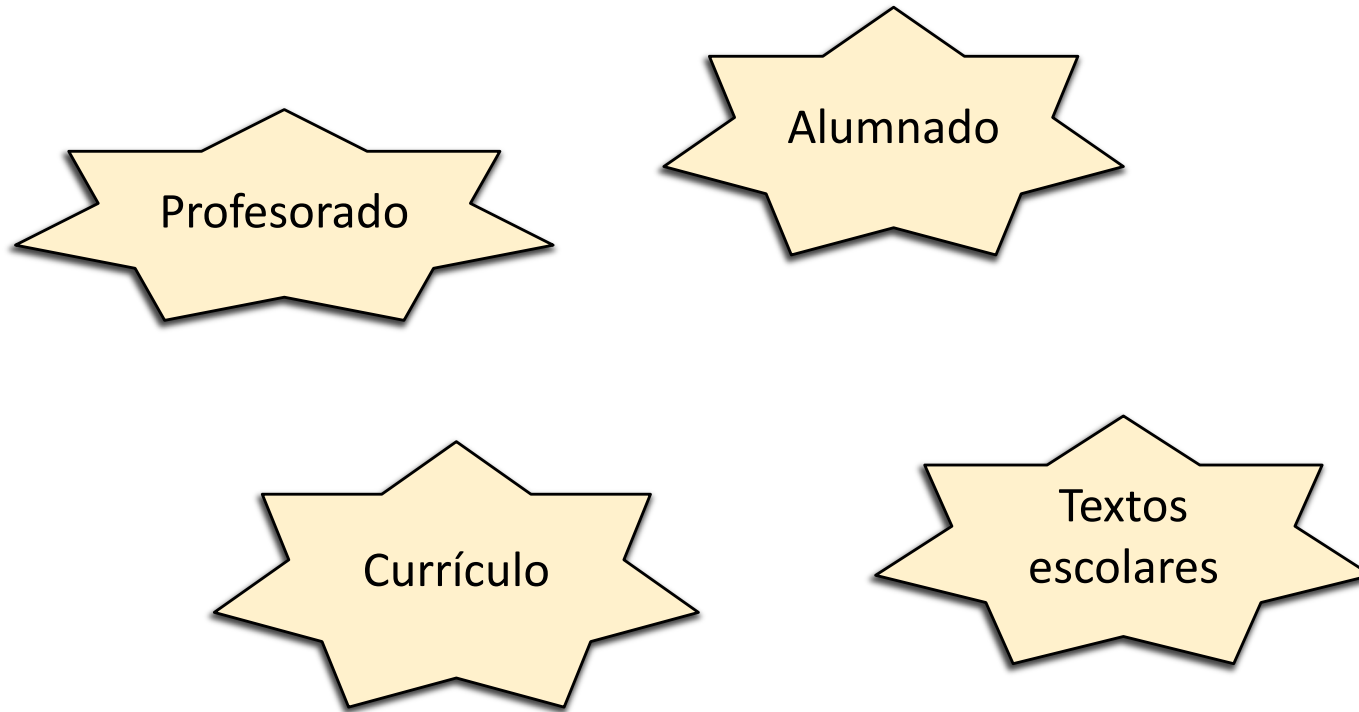


Centros en:

- ✎ Granada
- ✎ Córdoba
- ✎ Madrid
- ✎ Málaga



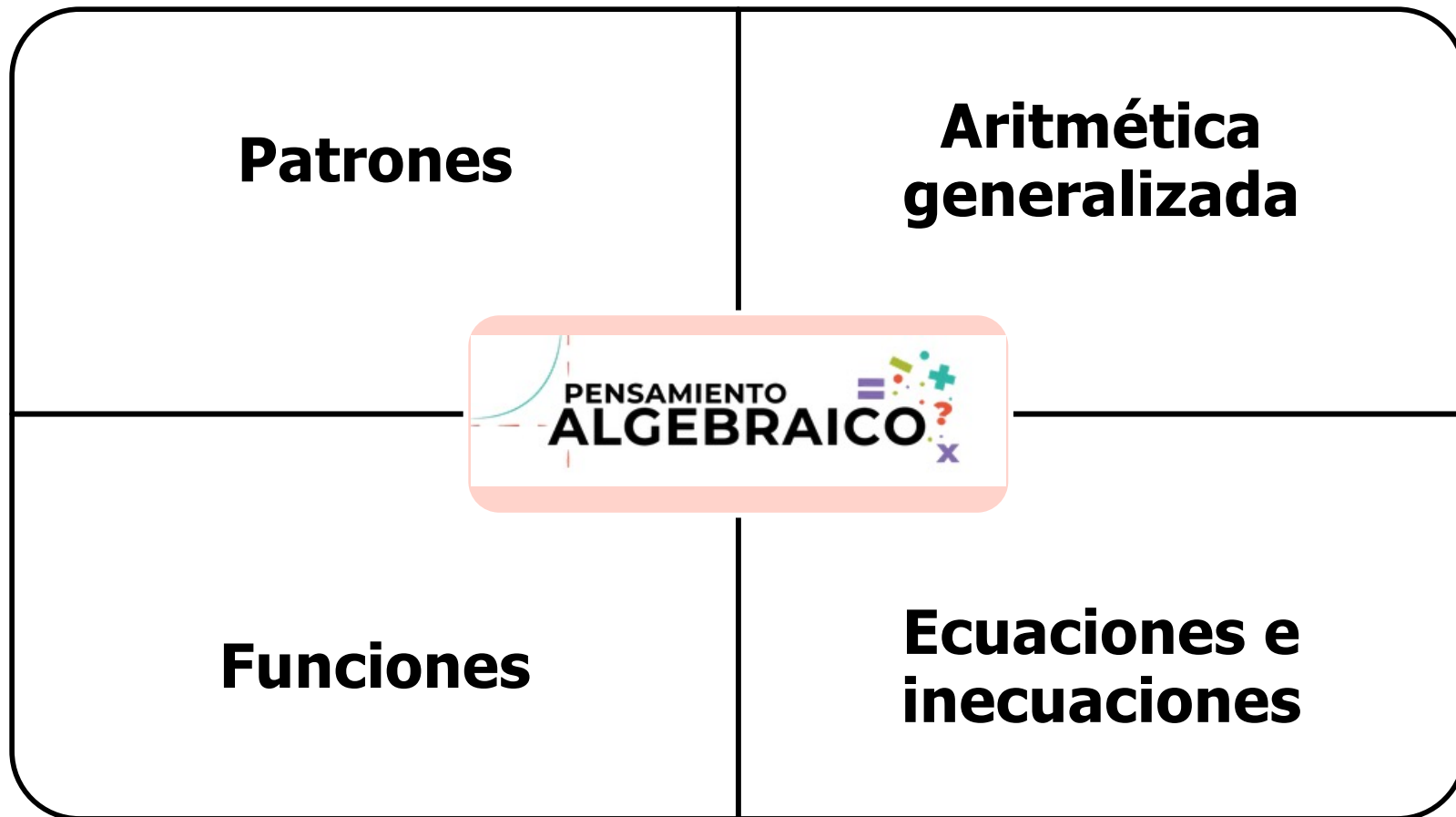




Objetivos de esta presentación

- Presentar diferentes **enfoques** a través de los cuáles se puede trabajar el álgebra en educación primaria y educación secundaria
- Presentar **prácticas algebraicas** para fomentar el sentido algebraico en las aulas de primaria y secundaria
- Mostrar ejemplos de **propuestas de aula** concretas donde esos enfoques y prácticas se ponen de manifiesto en primaria y secundaria con la intención de fomentar el sentido algebraico

Enfoques (matemáticos)



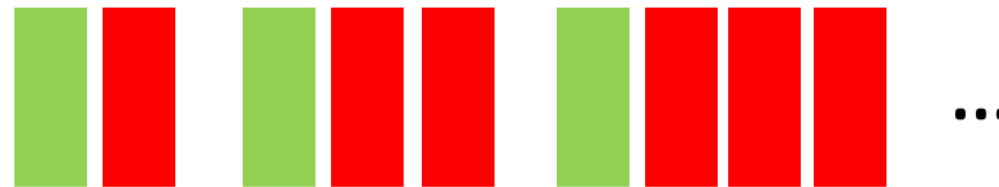
Patrones

1º-2º Prim.

Patrón cualitativo



Patrón de desarrollo






Patrón de cuantitativo

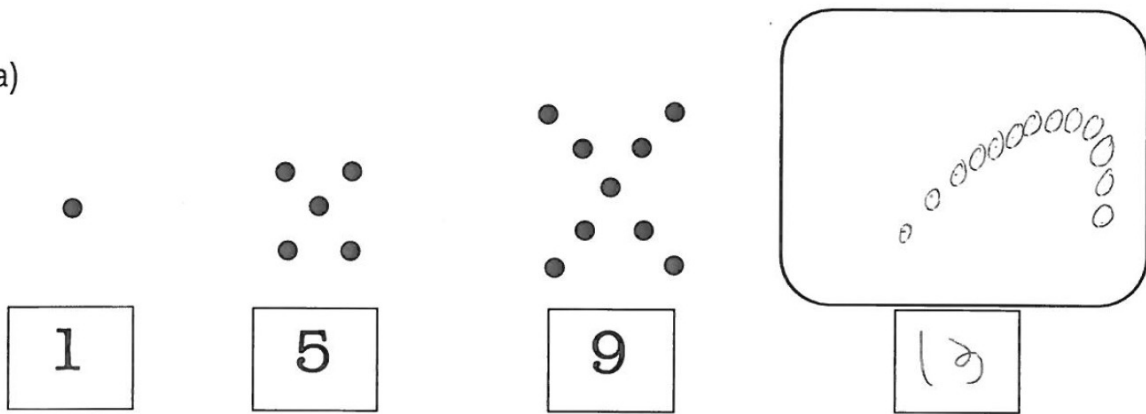


Patrones

5º-6º Prim.

-  Configuración puntual
-  Requerimiento
-  Números involucrados

a)



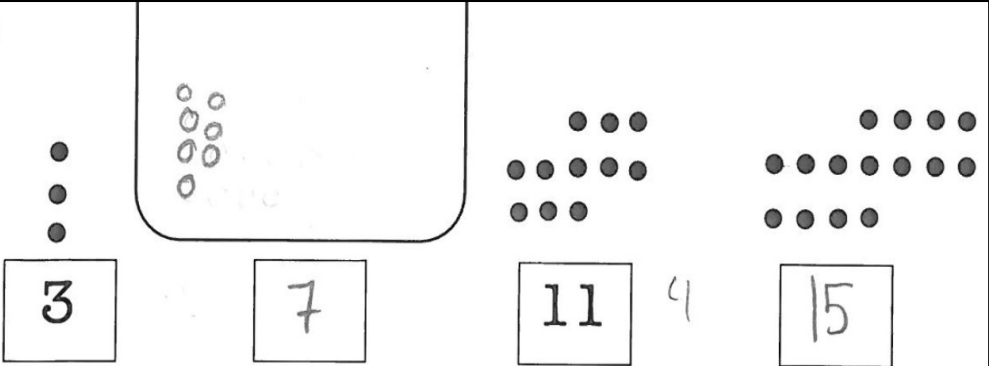
b) ¿Cuál es el patrón que sigue la secuencia? Explica.
 El patrón sigue la secuencia +4

a)



b) ¿Cuál es el patrón que sigue la secuencia? Explica.
 sigue siempre la misma secuencia suma y siempre en sucesivamente

a)



b) ¿Cuál es el patrón que sigue la secuencia? Explica.
 Entre cada uno hay 4.

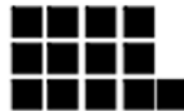
Las aproximaciones no son compartimentos estanco...

Step 1



Step 2

Step 3



Step 4

Step 5



(Cai y Knuth, 2011)

¿Cuál es el mayor número de rectas que podemos obtener al trazar rectas sobre un plano?

Funciones

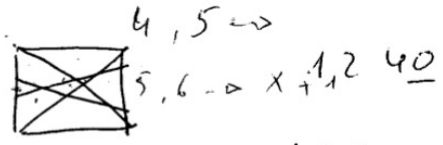
Hand-drawn diagrams illustrating the maximum number of regions formed by n lines on a plane. The diagrams show a square with 1, 2, 3, 4, and 5 lines drawn across it, with the resulting regions shaded or numbered. A table of values is written in the center, and the formula $n(n+1)/2 + 1$ is written at the bottom.

1	-	2	5
2	-	4	6
3	-	7	7
4	-	10	8
5	-	14	9

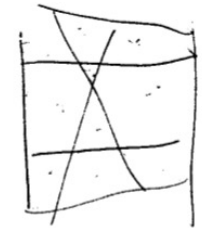
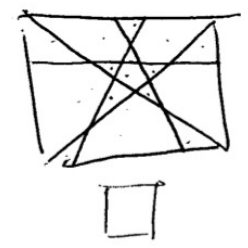
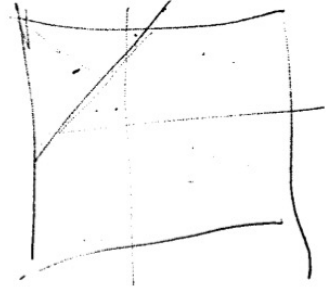
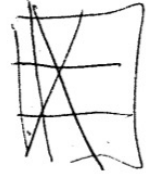
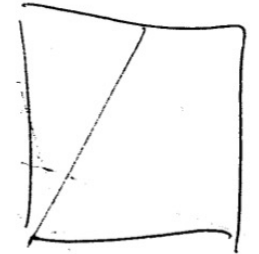
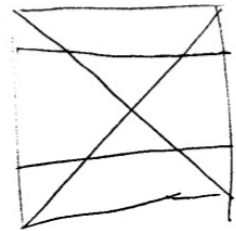
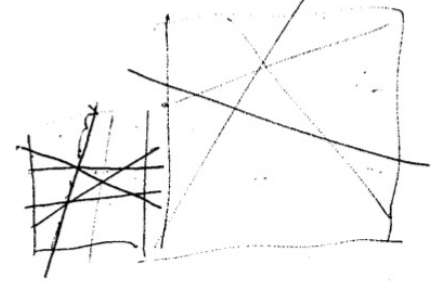
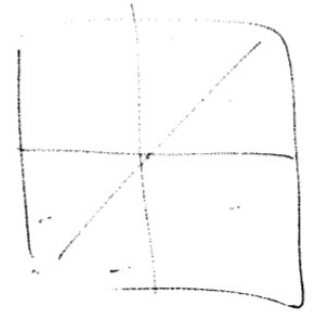
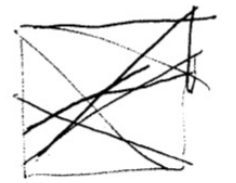
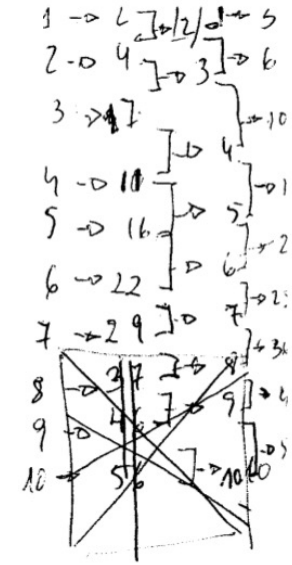
$n(n+1)/2 + 1$
 $7 \cdot 8 / 2 + 1 = 28 + 1 = 29$

3º ESO

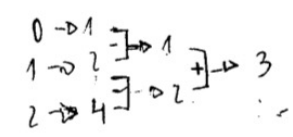
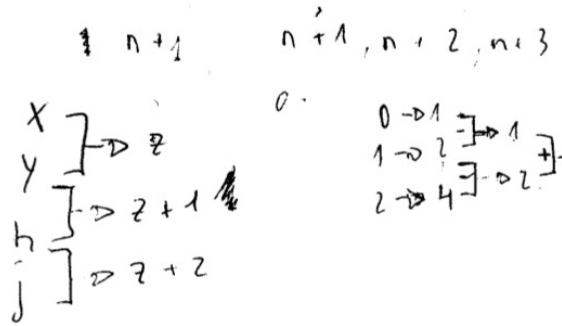
0 2 4 6 8



133 2



x, y = z



Aritmética generalizada

- Propiedades de las operaciones aritméticas según el curso

$$3 + 4 = 4 + 3 \quad \text{ó} \quad a + b = b + a$$

$$4 + 0 = 4 \quad \text{ó} \quad a + 0 = a$$

$$1 + (2 + 3) = (1 + 2) + 3 \quad \text{ó} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

¿Qué se obtiene si sumamos dos números pares?

Porque todos los números pares se pueden descomponer en un número multiplicado por dos y entonces, al hacer la suma de dos números pares, pues sería dos factor común de la suma. Y entonces sigue siendo dos por cualquier número y entonces, al multiplicarlo por dos pues siempre es par.

2º Bach.

...tú imagínate que me tienes que convencer a mí de que siempre da par.

Pues... habría que hacerlo a lo mejor... práctico, ¿no? Por ejemplo, di un número par.

Vale... mil setecientos.



Mil setecientos... y otro número par, por ejemplo el cuatro. ¿Ves? Pues los sumo y me da un número par.

4º ESO

Ecuaciones e inecuaciones (2º primaria)

**COMPLETA PARA QUE LA
EXPRESIÓN SEA VERDADERA**

$$\boxed{} < 8$$

$$16 + 2 > \boxed{}$$

$$29 = \boxed{} + 2$$

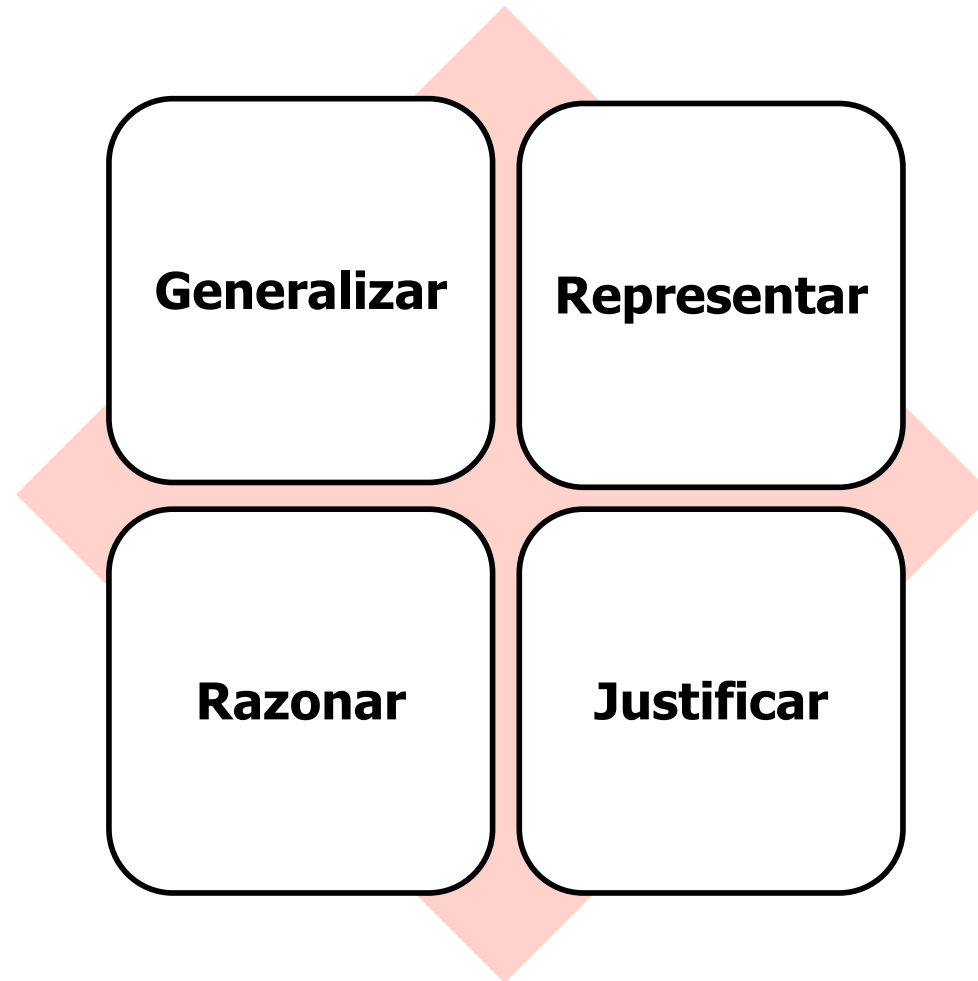
$$x + 10 < 20 - \boxed{}$$

$$\boxed{} + 1 = x + \boxed{}$$

$$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{} + \boxed{}$$

- Expresión mediante simbolismo de situaciones verbales.
- Invención de situaciones

Prácticas algebraicas



Tablas. Varios problemas-funciones

En la primera parada de un tren se suben 2 personas. En la tercera se suben 6... Si en cada parada se sube el mismo número de personas, en la parada 90, ¿cuántas personas se suben?

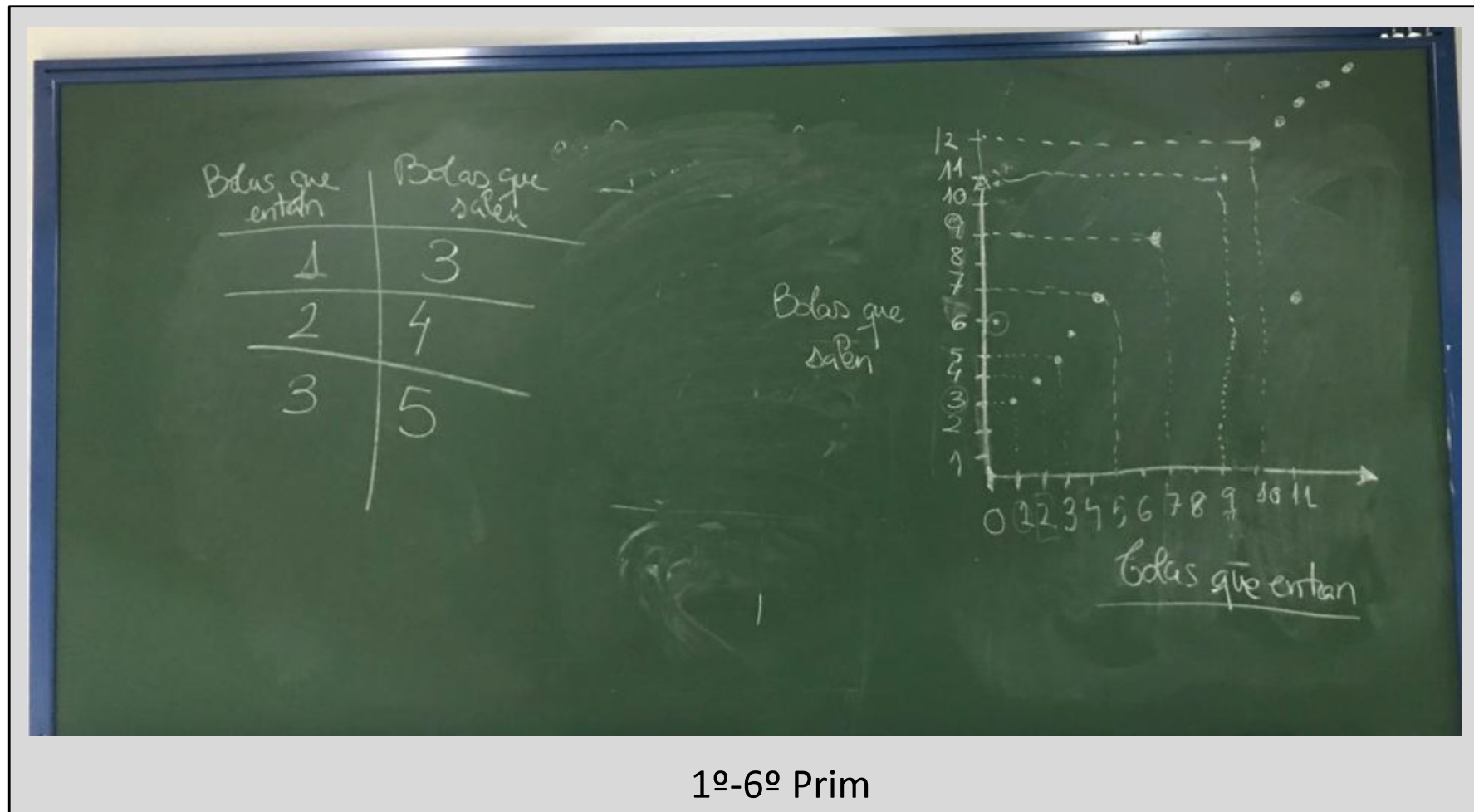
numero de Parada	numero de Personas
1	2
3	6
6	12
5	10
10	20
25	50
15	30
90	180
1000	2000
1 millon muchas	2 millares

2º Prim

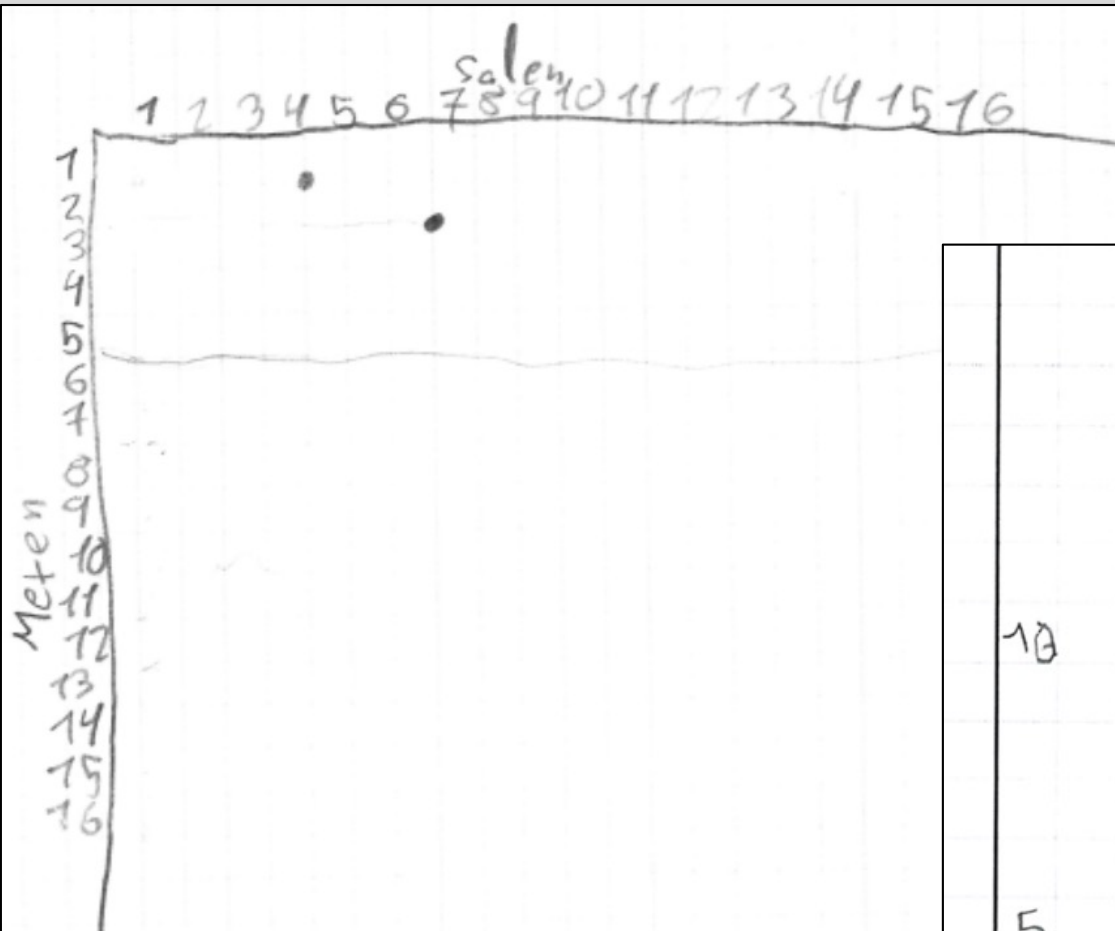
Torres, M. D., Brizuela, B. M., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics*, 10, 56.
<https://doi.org/10.3390/math10010056>

Funciones. Introducción de **gráficos cartesianos** en diferentes cursos

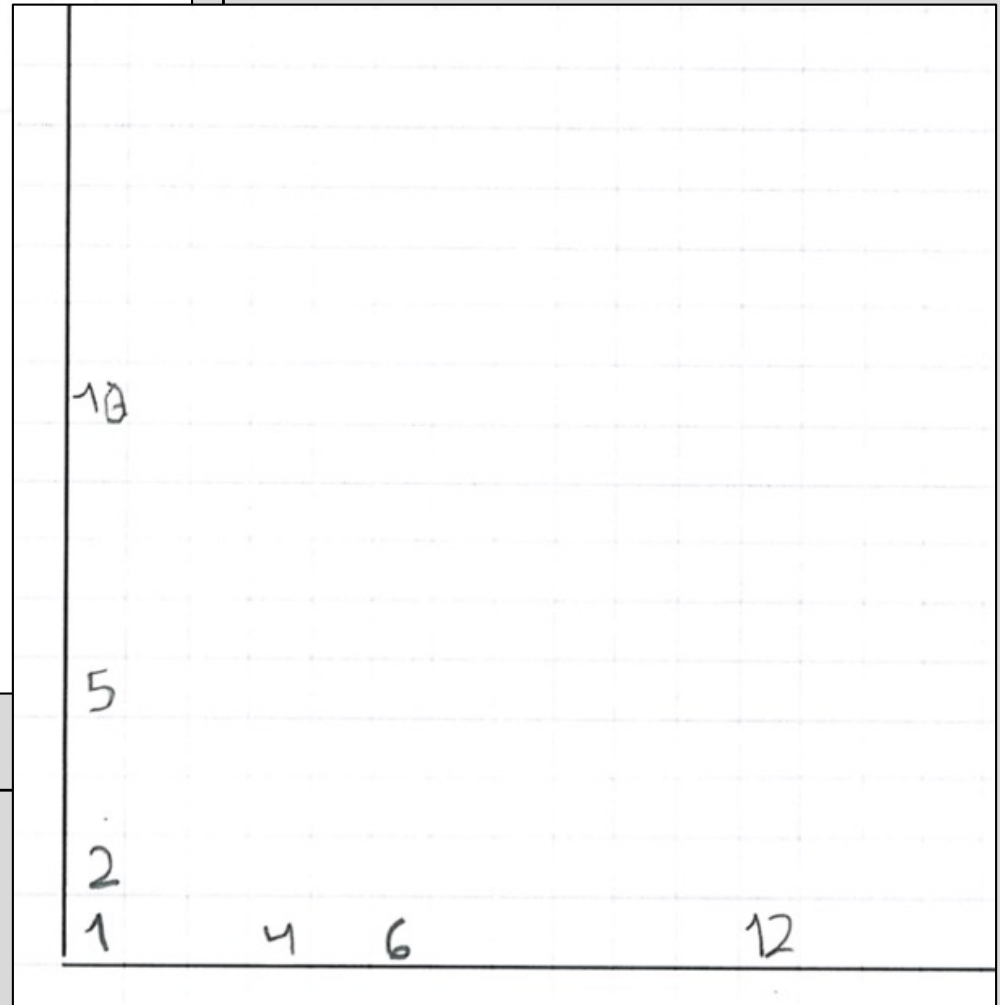
https://pensamientoalgebraico.es/static/media/archivos/actividades/Primaria_7_anos_MaquinaBolas.pdf



1º-6º Prim

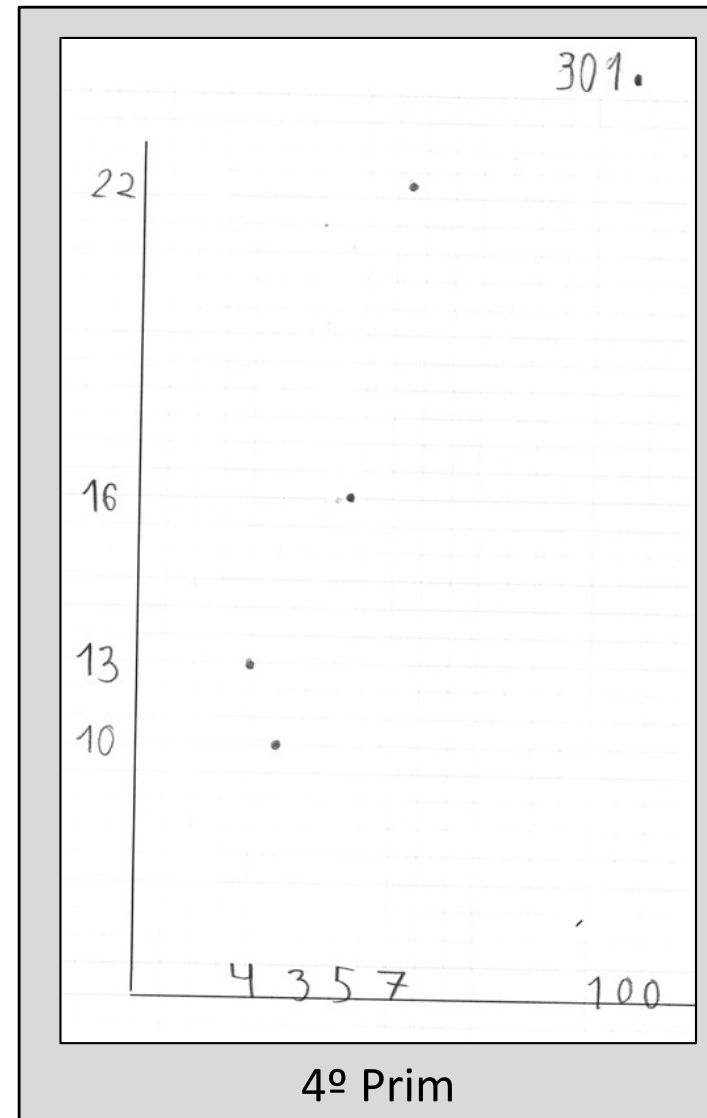


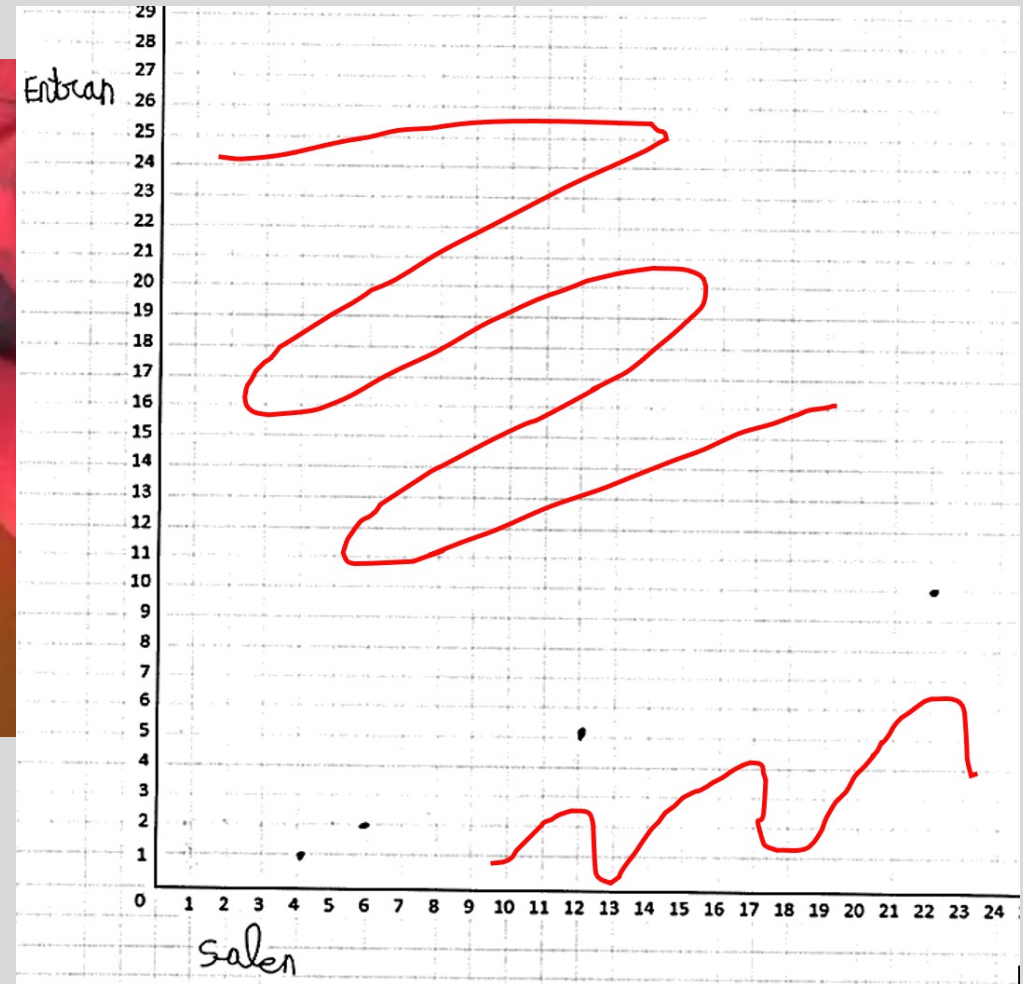
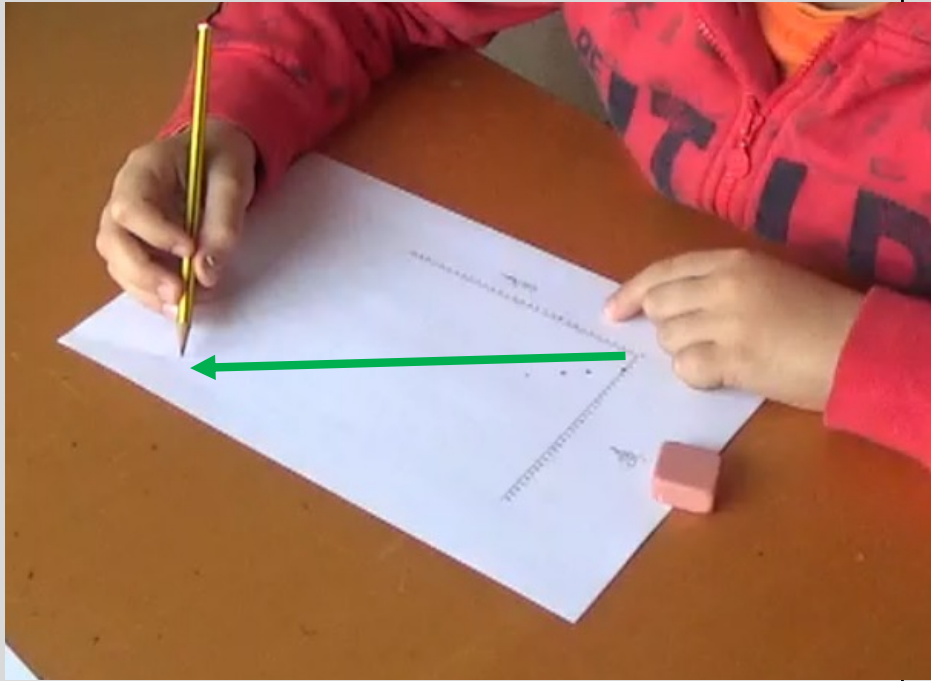
4º Prim



4º Prim

Entradas	Salidas
4	13
3	10
5	16
7	22
X	$X \times 3 + 1$
∞	∞

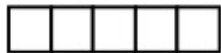




Cañadas, M. C., Moreno, A. J. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in Primary Education. *ZDM*, 56, 1059–1078
<https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2>

Funciones

Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:

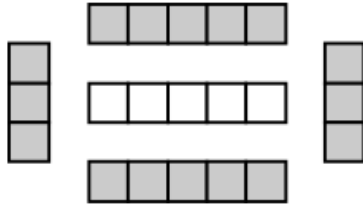


Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:

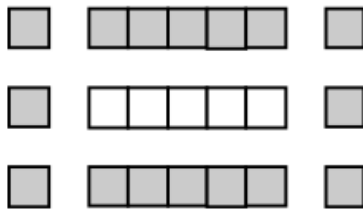


- *¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?*
- *Justifica tu respuesta.*

◆ $5 \times 2 + 6 \dots (1320 \times 2 + 6 = 2646)$



◆ $5 \times 2 + 2 + 4 \dots (1320 \times 2 + 2 + 4 = 2646)$

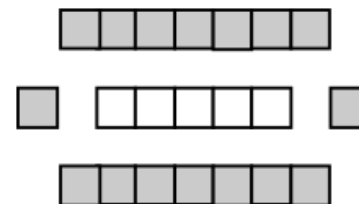


3º ESO-2 Bach

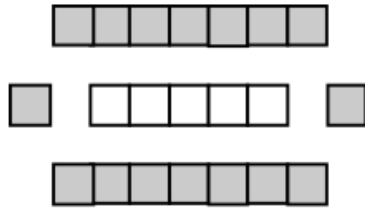
◆ $(5 \times 2 + 2 + 4) \dots (1322 + 1322 + 2 + 2 = 2646)$



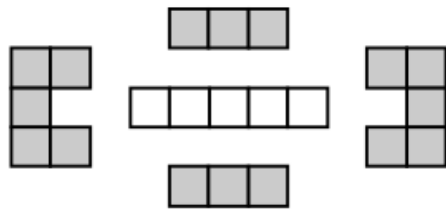
◆ $7 + 7 + 1 + 1 \dots (1322 + 1322 + 1 + 1 = 2646)$



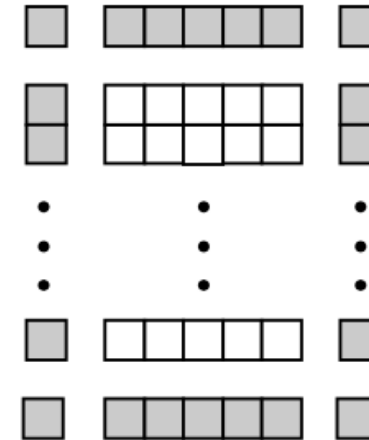
◆ $7 \times 2 + 2 \dots (1322 \times 2 + 2 = 2646)$



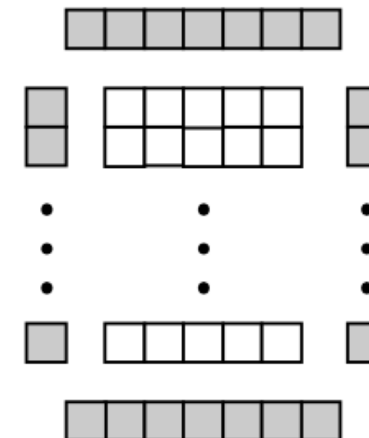
◆ $3 \times 2 + 10 \dots (1318 \times 2 + 10 = 2646)$



◆ $264 + 264 + 5 + 5 + 4 (542)$

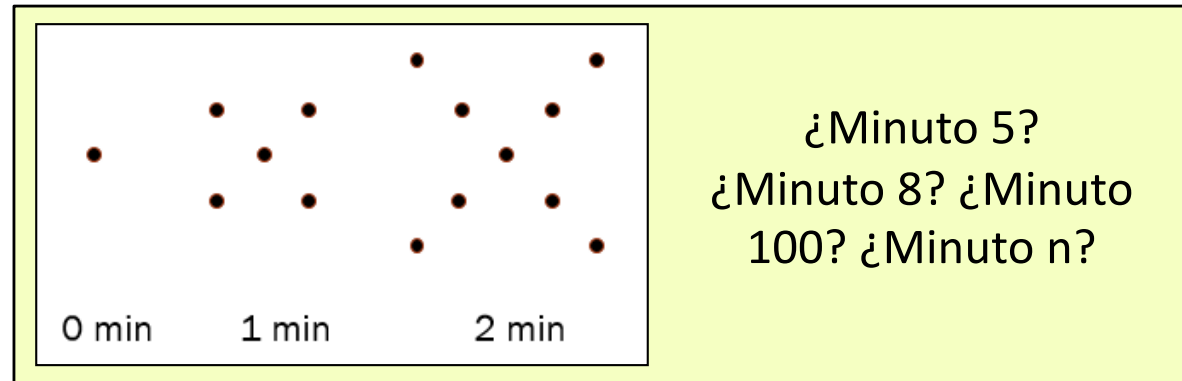


◆ $264 + 264 + 7 + 7 (542)$

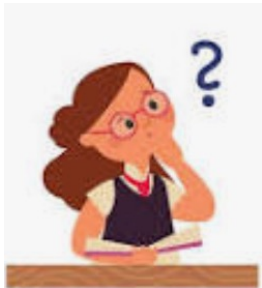


Funciones. Errores y dificultades. Mediación e intervención

6º Prim.
($y=4x+1$)



Que requieren **acción del estudiante**



- ✓ • Volver al caso particular inicial: se sugiere volver a revisar el proceso desde el inicio.
- ✓ • Volver al caso particular anterior, distinto del inicial.
- ✓ • Volver a un caso particular cualquiera, distinto del anterior y del inicial.
- ✓ • Volver sobre el mismo caso particular.

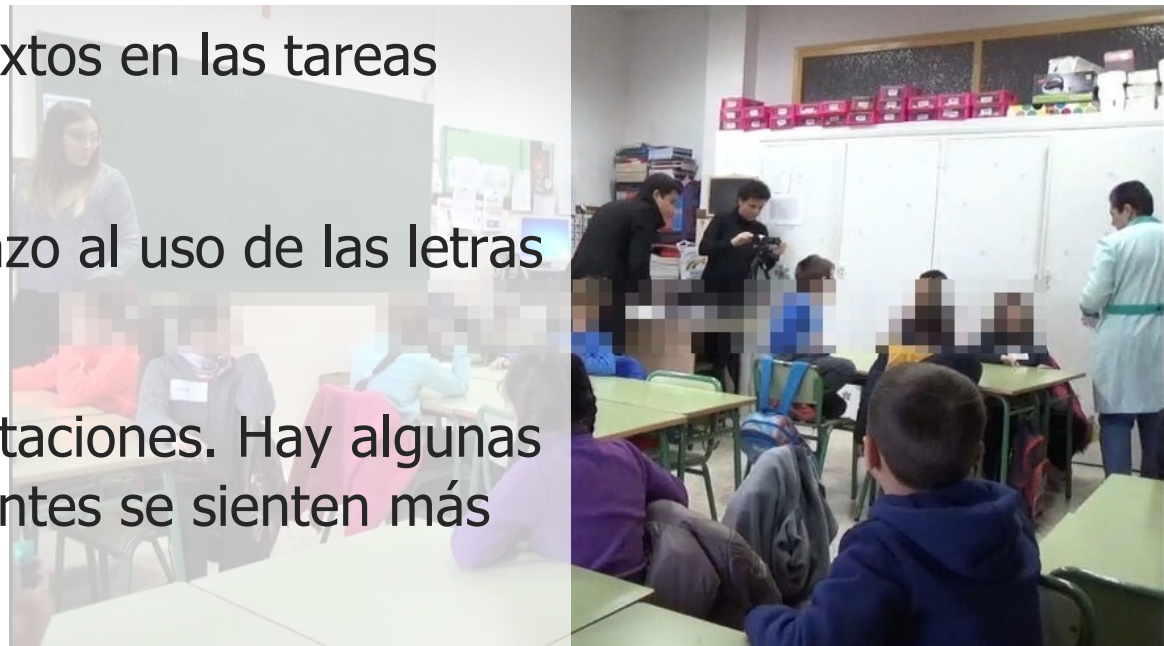
Que requieren **acción del entrevistador**

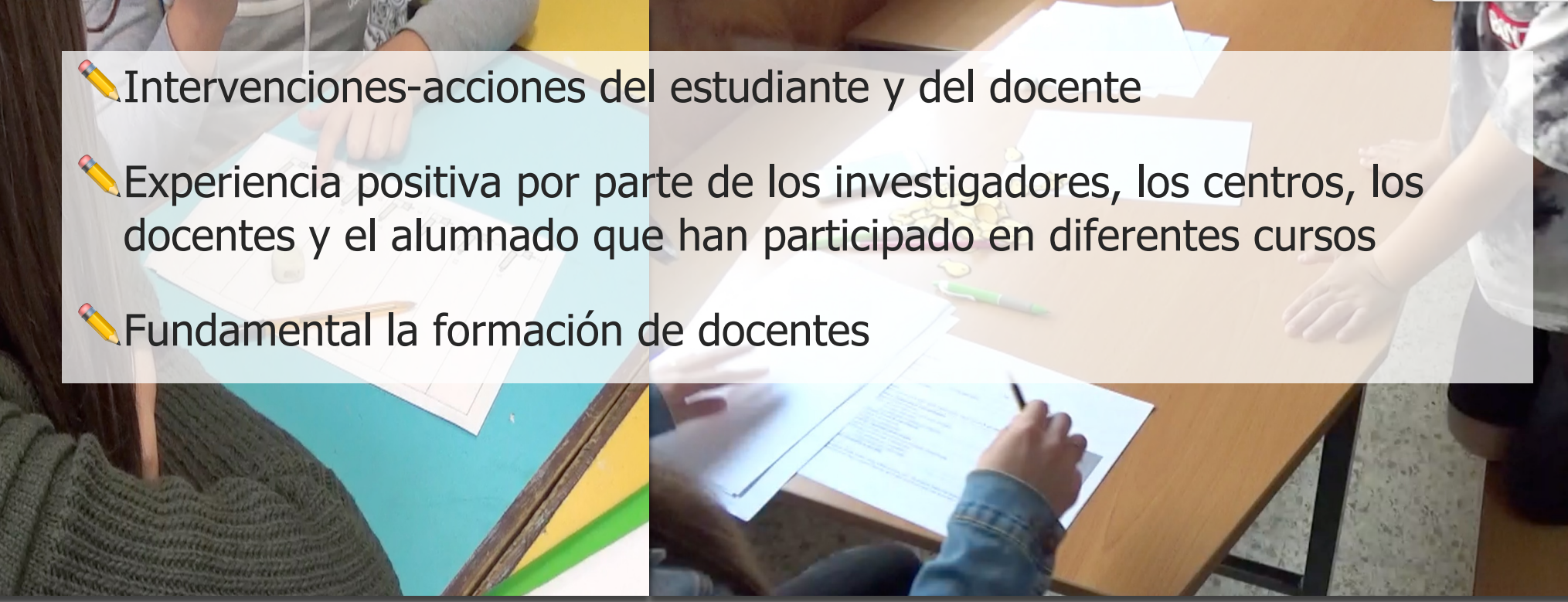
- ✓ Verbalizar el argumento o reflexión del estudiante: se repite verbalmente un argumento o una reflexión realizada anteriormente por el estudiante
- ✓ Repetir la pregunta: se repite la pregunta realizada, ya sea que ve al estudiante confundido o porque ha incurrido en un error
- ✓ Reformular la pregunta: se plantea una pregunta ya realizada de otra manera
- ✓ Calmar: se calma al estudiante (por ejemplo, diciéndole que tiene tiempo para responder o que no hay prisa)
- ✓ Repetir respuesta y pedir argumento: se repite la respuesta errónea del estudiante, sin mencionar que su respuesta no ha sido correcta y se realiza una pregunta de indagación de procedimiento. Por ejemplo se pregunta, "¿por qué?" o "¿cómo obtuviste ese resultado?"

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA*, 14(3), 204-225.

Algunas reflexiones para el trabajo del sentido algebraico... más allá de la x y la y

- ✎ Los estudiantes pueden hacer más cosas de las que pensamos relacionadas con el pensamiento algebraico. Debemos darles las oportunidades
- ✎ Tienen ideas intuitivas sobre “álgebra”
- ✎ Importancia de los contextos en las tareas planteadas. Motivación
- ✎ En general, no hay rechazo al uso de las letras en matemáticas
- ✎ Variedad en las representaciones. Hay algunas con las que unos estudiantes se sienten más cómodos que otros



- 
- ✎ Intervenciones-acciones del estudiante y del docente
 - ✎ Experiencia positiva por parte de los investigadores, los centros, los docentes y el alumnado que han participado en diferentes cursos
 - ✎ Fundamental la formación de docentes

Sentido algebraico en las aulas de primaria y secundaria: mucho más que la x y la y

María C. Cañadas
mconsu@ugr.es
Universidad de Granada

Congreso

«Avanzando en el Refuerzo de las
Competencias Lectora y Matemática»



Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.