Congreso
«Avanzando en el Refuerzo de las Competencias Lectora y Matemática»

Mejorar las prácticas con tareas matemáticas estimulantes y creativas

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra, Portugal

Palacio de Congresos de Oviedo (Asturias), 15 y 16 de mayo de 2025

Recomendações

para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática

Grupo de Trabalho de Matemática

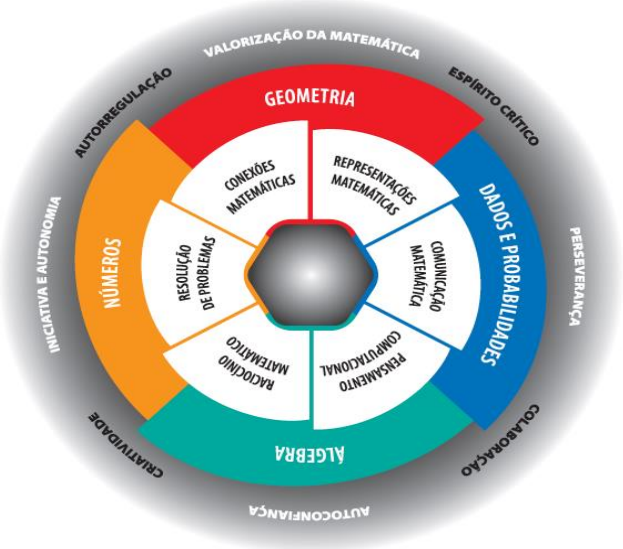
[Despachos n.º 12 530/2018 e n.º 7269/2019]

Relatório

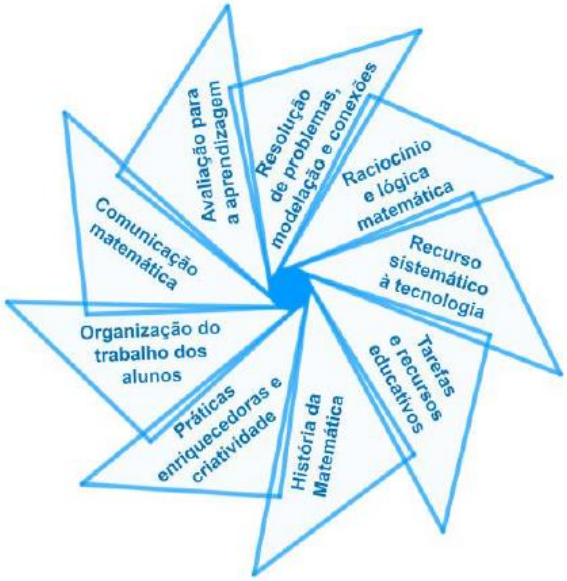
— versão final —

27 de março de 2020

2020

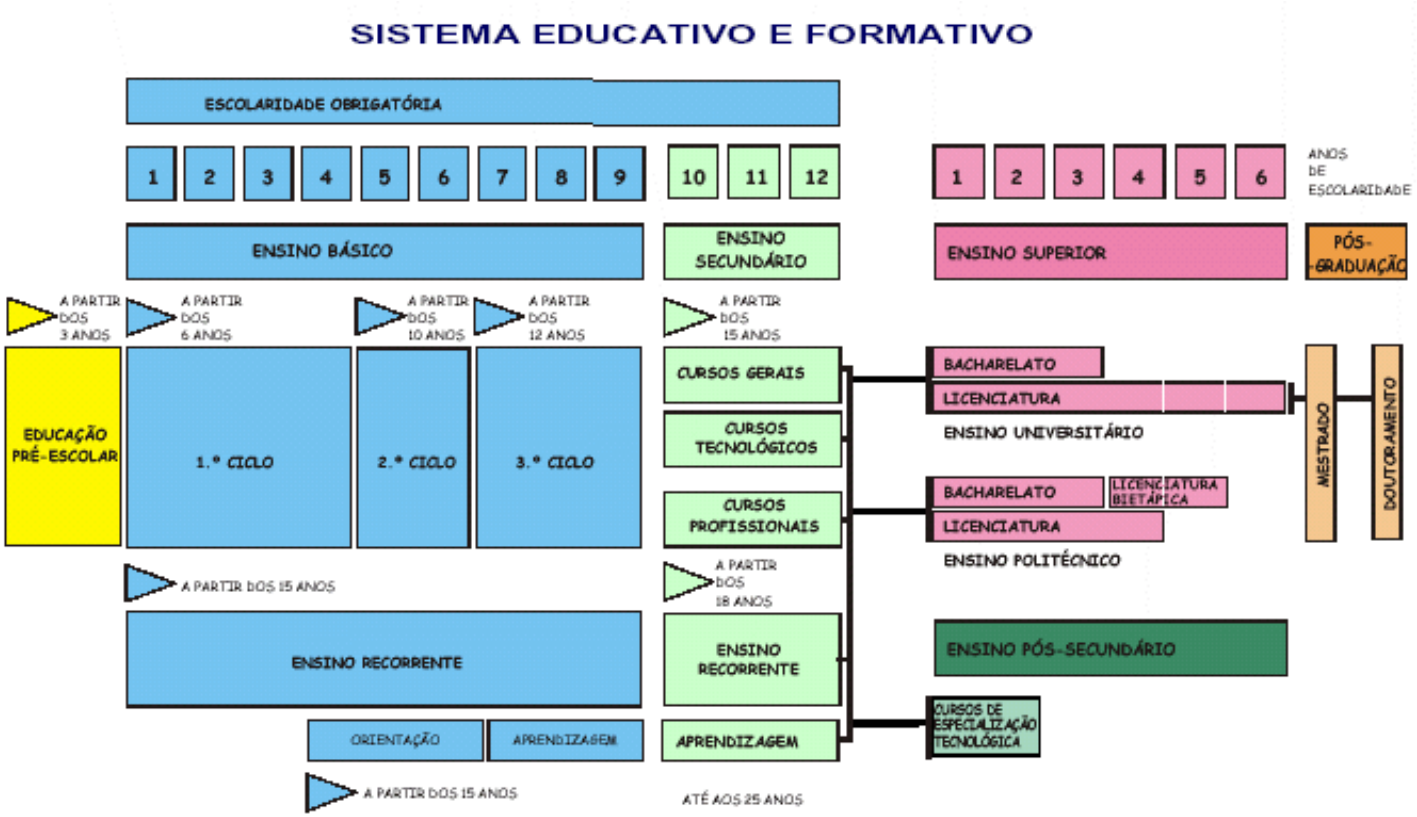


2021



2023

El sistema educativo en Portugal



Notas Explicativas:

- O ensino básico abrange o ensino obrigatório de 9 anos. É composto por três ciclos consecutivos de 4, 2 e 3 anos.
- O ensino recorrente é um ensino nocturno do ensino geral e técnico para alunos que abandonaram os estudos e para adultos.
- Cursos gerais são cursos do ensino secundário conduzindo predominantemente ao prosseguimento de estudos.
- Cursos tecnológicos são cursos do ensino secundário orientados para a vida activa.
- Cursos profissionais são cursos de natureza profissionalizante.
- Aprendizagem - Têm acesso a estes cursos indivíduos com idades compreendidas entre 14 e 25 anos. Têm a duração de 1 a 3 anos.
- Cursos de Especialização Tecnológica - Têm a duração de 1 a 2 anos, consoante o regime (diurno ou nocturno) e/ou as condições de acesso (os alunos provenientes dos Cursos Gerais têm de ingressar previamente num Curso Técnico para completamento do nível 3 de qualificação profissional).

Nuevos programas de Matemática

2001/03:
Nuevos Programas

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA A
10º ANO

Cursos Gerais de Ciências Naturais,
de Ciências e Tecnologias e de Ciências Sócio-Económicas

Autores
Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)
Maria Graziela Fonseca
Avélio Almeida Martins
Cristina Maria Cruchinho da Fonseca
Ilda Maria Couto Lopes

Matemática A

Matemática B

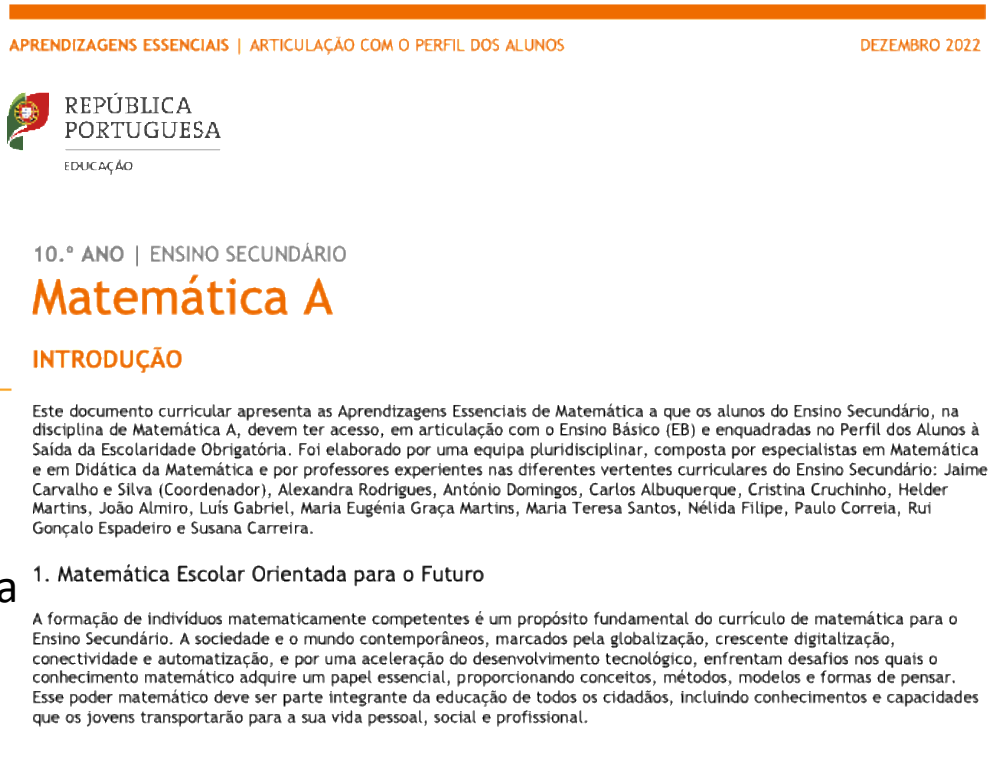
MACS-Matemática Aplicada a las Ciencias Sociales

Matemática Profesional

Matemática Artística

Nuevos programas de Matemática

2022/23: Aprendizaje Esenciales de Matemáticas para la Educación Secundaria



APRENDIZAGENS ESSENCIAIS | ARTICULAÇÃO COM O PERFIL DOS ALUNOS DEZEMBRO 2022

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

10.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática A

INTRODUÇÃO

Este documento curricular apresenta as Aprendizagens Essenciais de Matemática a que os alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, devem ter acesso, em articulação com o Ensino Básico (EB) e enquadradas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Foi elaborado por uma equipa pluridisciplinar, composta por especialistas em Matemática e em Didática da Matemática e por professores experientes nas diferentes vertentes curriculares do Ensino Secundário: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Helder Martins, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Teresa Santos, Nélida Filipe, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o Ensino Secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Questión básica

- ¿Para qué se enseñan las matemáticas?

Comisión Europea: 5/03/2025

EUROPEAN
COMMISSION

Brussels, 5.3.2025
COM(2025) 88 final

COMMUNICATION FROM THE COMMISSION TO THE EUROPEAN PARLIAMENT, THE COUNCIL, THE EUROPEAN ECONOMIC AND SOCIAL COMMITTEE AND THE COMMITTEE OF THE REGIONS

on the Action Plan on Basic Skills

Comisión Europea: 5/03/2025

- Las competencias matemáticas son esenciales para la vida cotidiana en nuestro mundo rico en tecnología. Son la base del pensamiento lógico y abstracto. Estas competencias, incluida la educación financiera, permiten a las personas tomar decisiones informadas basadas en datos y les ayudan a desarrollar un enfoque meditado para la toma de riesgos, empoderando a los ciudadanos para tomar decisiones financieras informadas a lo largo de sus vidas.

Comisión Europea: 5/03/2025

- Los avances en la tecnología, la investigación educativa y las necesidades sociales han llevado a un mayor énfasis en las competencias de resolución de problemas y el pensamiento crítico de los estudiantes, alentándolos a comprender y aplicar conceptos matemáticos en lugar de simplemente memorizar fórmulas.

Porque la Matemática?

unesco

Las matemáticas potencian el desarrollo sostenible

MATHEMATICS
FOR ACTION
Supporting Science-Based Decision-Making

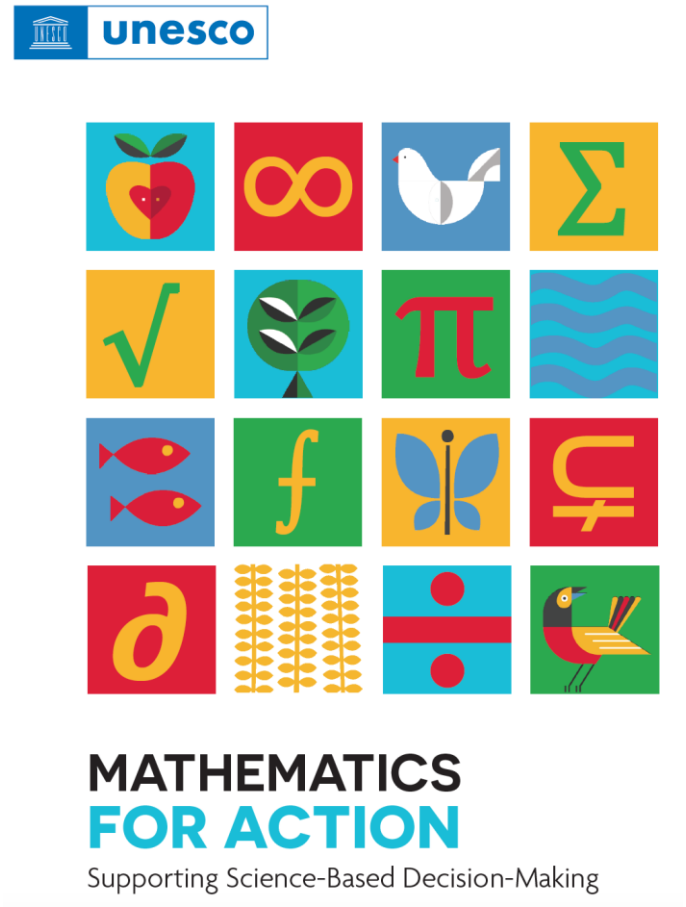
Todo lo que hacemos se basa en alguna estructura matemática.

2022

Porque la Matemática?

La educación matemática desarrolla habilidades de **resolución de problemas** y **pensamiento crítico** que pueden **transferirse** a nuevas situaciones y a una **variedad** de campos ocupacionales.

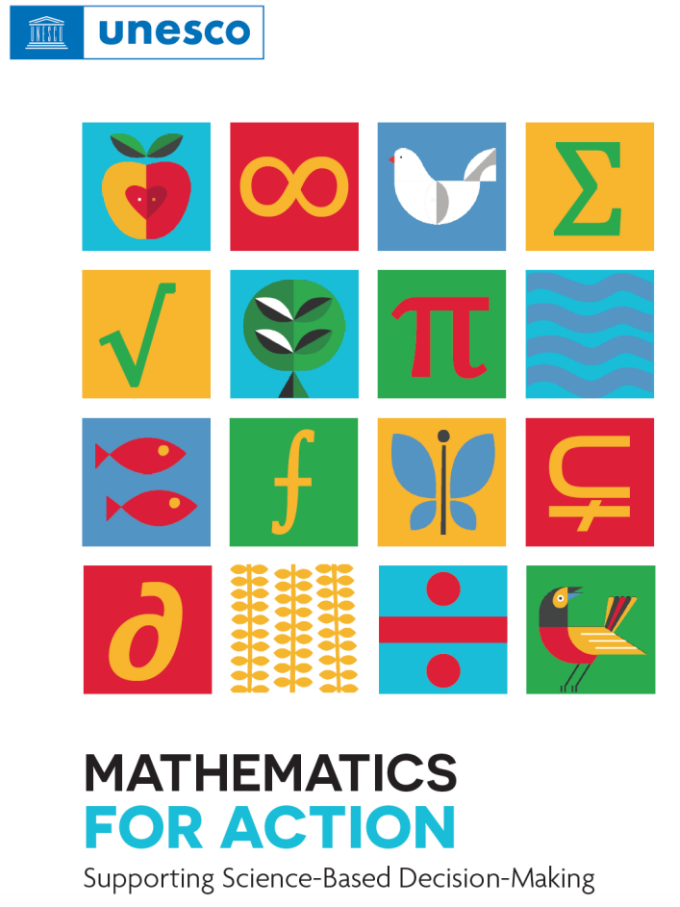
.



2022

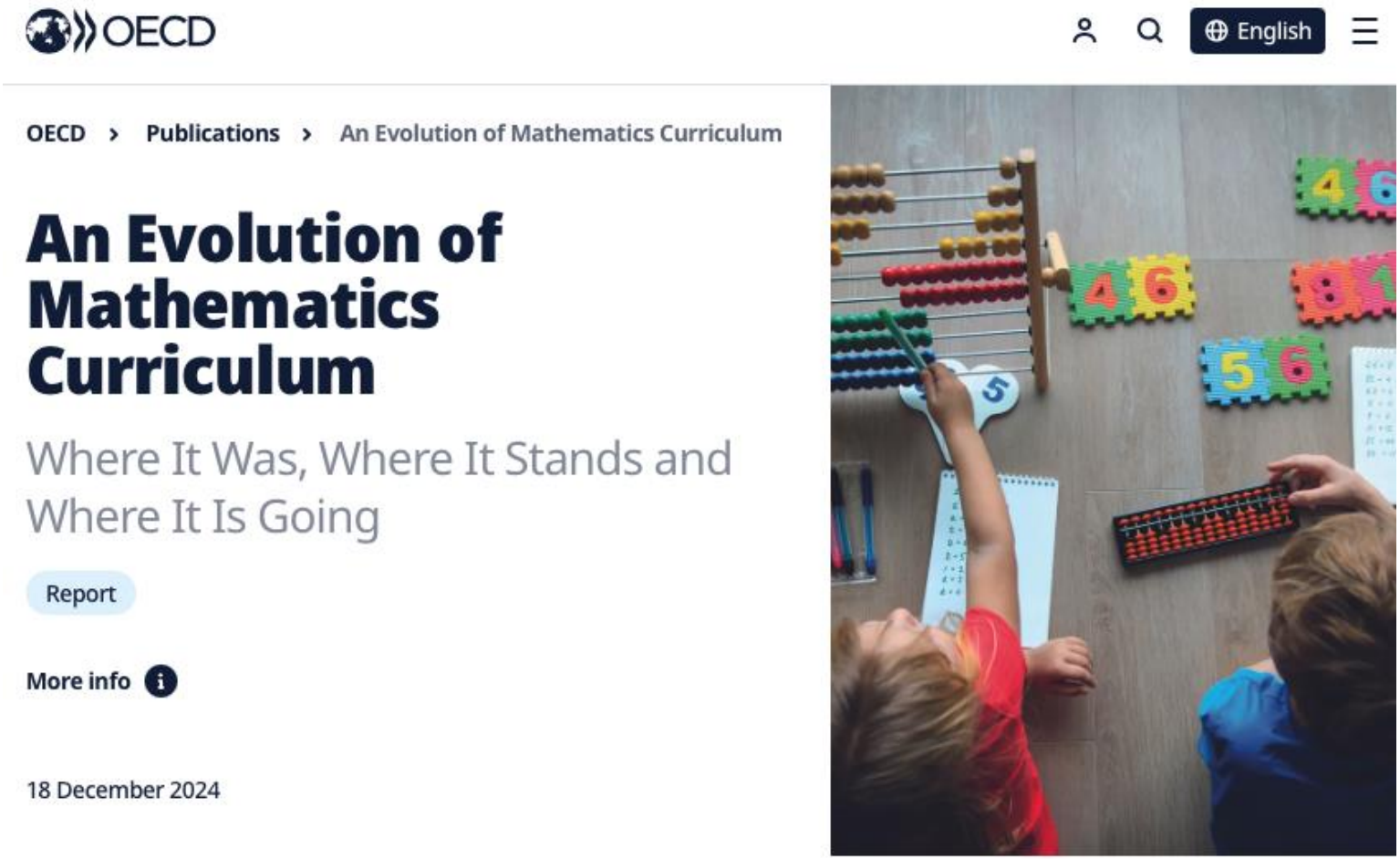
Porque la Matemática?

La educación matemática es importante para formar **ciudadanos reflexivos y críticos** que puedan hacer frente a las **demandas matemáticas de la vida cotidiana**, y también para preparar un número suficiente de matemáticos y científicos capaces de hacer frente a los **desafíos del mundo contemporáneo**.



2022

OCDE (2024): An Evolution of Mathematics Curriculum: Where It Was, Where It Stands and Where It Is Going



OCDE (2024): Una evolución del currículo de matemáticas: dónde estaba, dónde está y hacia dónde va

- A medida que los responsables de las políticas globales navegan por el cambiante panorama social, económico y tecnológico, **modernizar los programas de matemáticas resulta crucial**. Un currículo orientado al futuro proporciona a los estudiantes las competencias que necesitan para su vida personal y profesional.

OCDE (2024): Una evolución del currículo de matemáticas: dónde estaba, dónde está y hacia dónde va

- El capítulo 1 analiza las **necesidades del siglo XXI** que impulsan la transformación de los currículos de matemáticas.
- Las competencias básicas como la literacia, el pensamiento crítico y la resolución de problemas se incorporan ampliamente en los programas de matemáticas.
- Se hace menos hincapié en la empatía, la confianza, la responsabilidad y la coagencia.

OCDE (2024): Una evolución del currículo de matemáticas: dónde estaba, dónde está y hacia dónde va

- El capítulo 2 analiza la **evolución de los currículos de matemáticas** en diferentes países a lo largo de 25 años.
- Destaca el enfoque creciente en el razonamiento matemático y la estadística en los planes de estudio modernos
- El capítulo identifica diferencias entre las directrices curriculares y los libros de texto, especialmente en lo que respecta al fomento del pensamiento de orden superior.

OCDE (2024): Una evolución del currículo de matemáticas: dónde estaba, dónde está y hacia dónde va

- Los recursos son esenciales para el éxito de la reforma curricular: los docentes necesitan desarrollo profesional continuo, recursos seleccionados y herramientas apropiadas para impartir una educación matemática de alta calidad.

desarrollo profesional continuo

- 1997
  - Docentes Acompañantes/Seguimiento del programa de Matemáticas
  - Reuniones periódicas de los acompañantes con los profesores en las escuelas (con grupos de escuelas)
- 2023
  - Formación docente en dos fases: Primero la formación de formadores, luego la desmultiplicación

diferencias entre las directrices curriculares y los libros de texto

- 2023
  - En la formación organizada por el Ministerio de la Educación participaran todos los autores de libros de texto de escuela secundaria
  - Interacción con autores de libros de texto: preguntas y respuestas continuas

recursos seleccionados

- 2023:
  - Creación de clases piloto.
  - Publicación de tareas comentadas utilizadas con alumnos en clases piloto.

Colecciones de tareas comentadas

https://aem.dge.mec.pt/

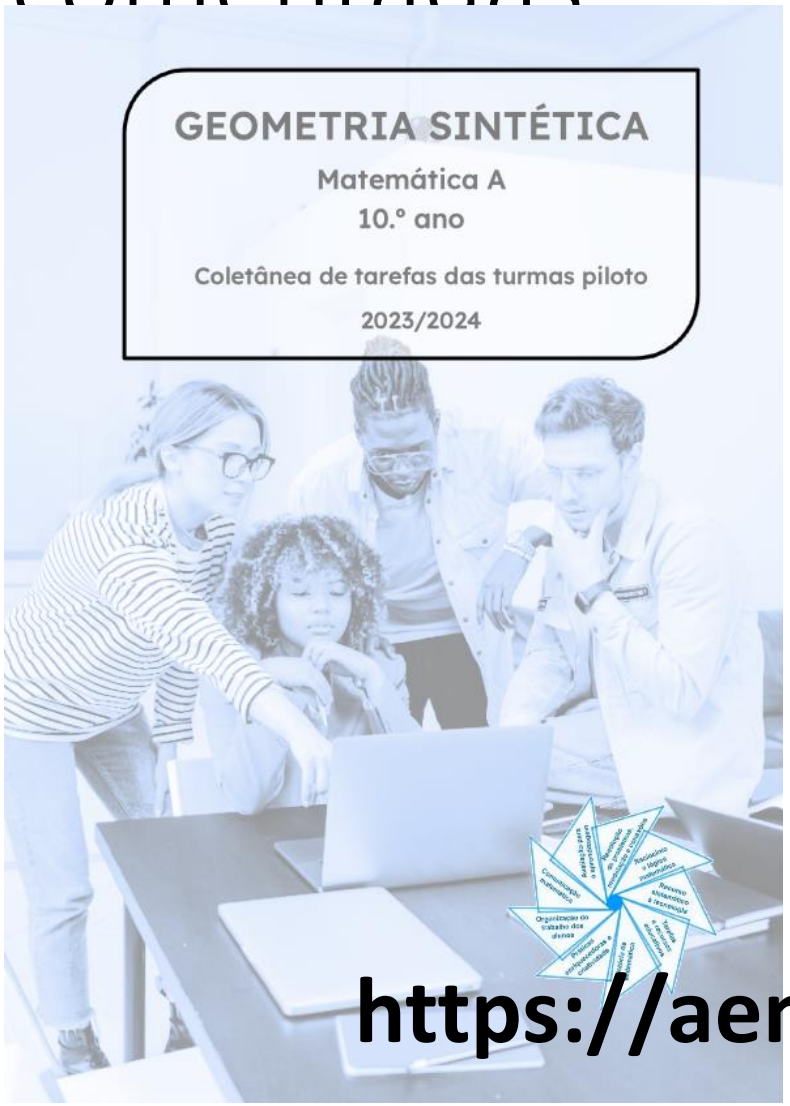
Colecciones de tareas comentadas

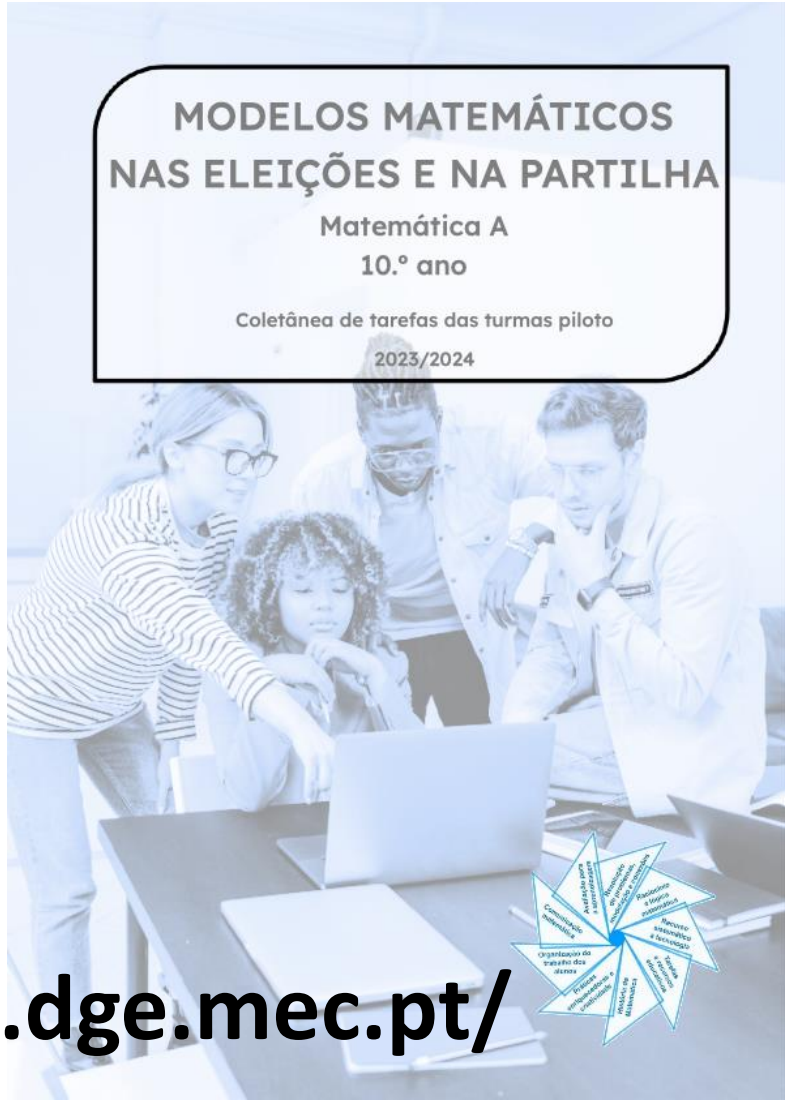
10.º Ano

- Modelos Matemáticos nas Eleições e na Partilha
- Modelos Matemáticos em Finanças
- Estatística
- Geometria sintética
- Funções
- Geometria analítica no plano e no espaço

https://aem.dge.mec.pt/

Colecciones de tareas comentadas





https://aem.dge.mec.pt/

Colecciones de tareas

https://aem.dge.mec.pt/

Colecciones de tareas comentadas

TEMA - FUNÇÕES

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
1	Tarefa 1 No tempo dos babilónicos	**Generalidades acerca de funções** Evolução histórica do conceito de função e formas de representação Funções definidas por tabelas, gráficos ou analiticamente	• Analisar elementos da evolução histórica do conceito de função e as diversas formas de representação: diagramas, tabelas, gráficos e expressões analíticas. • Pode ser feito através de tabelas numéricas (quadrados, cubos, recíprocos, raízes quadradas e raízes cúbicas), tabelas trigonométricas de Ptolomeu/Copérnico ou lançamento de projéteis.	Trabalho a pares	• Práticas enriquecedoras e criatividade • História da Matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)
2	Tarefa 2 A tabela de Copérnico	**Generalidades acerca de funções** Evolução histórica do conceito de função e formas de representação Funções definidas por tabelas, gráficos ou analiticamente	• Analisar elementos da evolução histórica do conceito de função e as diversas formas de representação: diagramas, tabelas, gráficos e expressões analíticas.	Trabalho a pares	• Práticas enriquecedoras e criatividade • História da Matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B)

Colecciones de tareas comentadas

Tarefa 1

No tempo dos babilónicos

Um dos primeiros povos a usar tabelas com valores numéricos, há mais de 4000 anos, foram os Babilónicos (2000 a.c.).

Supõe-se que este tipo de tabelas era utilizado para tornar os cálculos aritméticos mais simples, nomeadamente para auxílio aos cálculos com volumes.

Considera a tabela abaixo, adaptada de uma utilizada pelos Babilónicos:

1	2	3	4	5	6	7
1	8	27	64	125	216	343

1. Consegues identificar, na segunda linha da tabela, alguma lei de formação dos números?

Colecciones de tareas comentadas

Tarefa 1

No tempo dos babilónicos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa tem como objetivo fazer a introdução do tema funções. Para isso, a tarefa é baseada nas tabelas de quadrados e cubos existentes nos tempos dos Babilónios, na antiga Mesopotâmia.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceitos de Funções do Ensino Básico.

Materiais e recursos: Material de escrita.

Colecciones de tareas comentadas

Notas e sugestões:

Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 1 tempo letivo (50 minutos).

Num primeiro momento, far-se-á uma breve apresentação da tarefa, e organizar-se-ão os alunos em pares para a sua resolução .

Propõe-se 30 minutos para a sua resolução, a qual poderá passar pelo recurso à tecnologia (calculadora gráfica ou folha de cálculo), e o restante tempo para discussão e apresentação das conclusões em grupo turma.

Colecciones de tareas comentadas

Tarefa 2

A tabela de Copérnico

Introdução

Nicolau Copérnico (1473-1543) foi um astrónomo e matemático polaco

Copérnico, no século XVI, estudou os movimentos dos planetas e escreveu a obra: "As Revoluções dos Orbes Celestes", que foi publicada em 1566.

Nesta obra, Copérnico precisava de relacionar a medida de uma corda subtensa (correspondente) a um arco com a medida do ângulo ao centro. Na figura 1 temos a corda CD subtensa ao arco CAD, associado ao ângulo ao centro $C\hat{O}D$.

Por exemplo, sabe-se que numa circunferência uma corda subtensa num ângulo de 60 graus tem exatamente o mesmo comprimento do raio da circunferência.

Copérnico refere ainda que:

Colecciones de tareas comentadas

Tarefa

1. Consulta a tabela em anexo e responde aos dois itens seguintes:
   1.1. Qual é a medida da semi-corda subtensa ao arco que é o dobro de 9 graus?
   1.2. Se a semi-corda for de 98378, qual é o arco associado?

2. Copérnico não tinha calculadoras, pelo que teve de desenvolver métodos geométricos para fazer os cálculos que levaram a esta tabela. Os cálculos em princípio estarão corretos, mas queremos usar as nossas calculadoras para verificar alguns dos resultados de Copérnico. Para isso podemos usar as teclas "*sin*" e "*cos*".
   2.1. Tendo em conta a definição geométrica e usando as relações trigonométricas que conheces para triângulos retângulos (seno, cosseno e tangente), que expressão designatória poderá ter uma correspondência que permita relacionar um dado ângulo e a sua correspondente semi-corda? Nota que na figura 1 o triângulo $[OCE]$ é retângulo em E;

Colecciones de tareas comentadas

TABELA DAS LINHAS RECTAS SUBTENSAS NUM CÍRCULO

Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°	Arcos		Semi-cordas subtendendo Arcos Duplos	Diferenças de fracções de 1°
Gr.	Min.			Gr.	Min.		
0	10	291	291	6	10	10742	289
0	20	582		6	20	11031	
0	30	873		6	30	11320	
0	40	1163		6	40	11609	
0	50	1454		6	50	11898	
1	0	1745		7	0	12187	
1	10	2036		7	10	12476	
1	20	2327		7	20	12764	288
1	30	2617		7	30	13053	
1	40	2908		7	40	13341	
1	50	3199		7	50	13629	
2	0	3490		8	0	13917	
2	10	3781		8	10	14205	
2	20	4071		8	20	14493	

Colecciones de tareas comentadas

Tarefa 2

A tabela de Copérnico

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

A tarefa tem como objetivo continuar a efetuar a introdução ao tema funções. Para isso, a tarefa é baseada na obra: "As Revoluções dos Orbes Celestes", da autoria de Copérnico, publicada em 1566.

Conhecimentos prévios dos alunos: Noções de Funções e de Trigonometria do Ensino Básico.

Materiais e recursos: Material de escrita e calculadora

Colecciones de tareas comentadas

Notas e sugestões:

Prevê-se para a resolução, discussão e apresentação de conclusões a utilização de 2 tempos letivos (100 minutos).

O professor deve dispor os alunos em grupos de dois, apresentando a tarefa e lançando o tema à discussão.

Propõe-se 60 minutos para a sua resolução e o restante tempo para discussão e apresentação das conclusões no grupo turma.

O professor acompanha o desempenho dos alunos, proporcionando o feedback necessário, sem nunca dar as respostas, em pequeno e/ou em grande grupo.

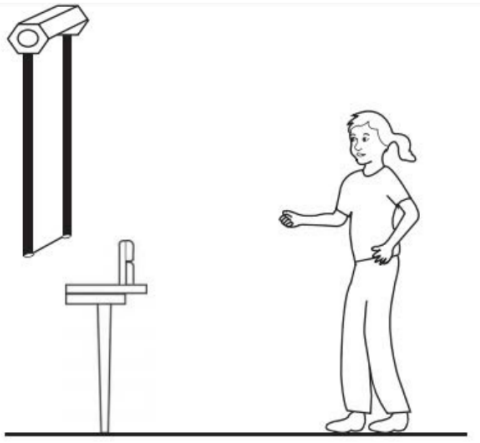
Colecciones de tareas comentadas

Tarefa 3a

Imitar o gráfico

Se ocorrer, durante algum tempo, um movimento de aproximação e afastamento entre um objeto e um sensor de movimento que o detete, há pelo menos duas variáveis que se relacionam, o tempo decorrido desde que se inicia o movimento e a respetiva distância do objeto ao sensor.

Considera a situação sugerida pela figura, em que o sensor de movimento está fixo sobre uma mesa e em que um aluno se desloca à sua frente, de modo a fazer um movimento que se traduza numa representação gráfica como a que se pode observar abaixo, ou outra fornecida pelo software utilizado para gerar as representações gráficas e para interpretar os dados recolhidos com o sensor.



Colecciones de tareas comentadas

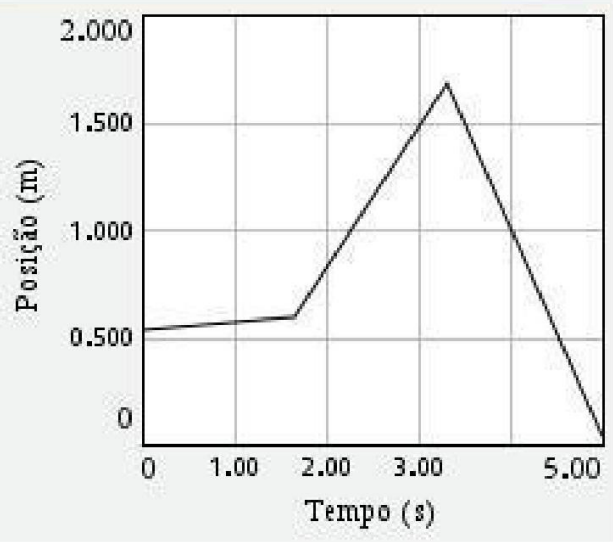


Imagem obtida a partir de uma calculadora gráfica

("Posição" refere-se à distância do aluno ao sensor)

Aciona o dispositivo para que este forneça uma representação gráfica, que deverá tentar repetir (a) (b), movendo-se em frente ao sensor na questão 7. Mas antes disso, responde a algumas questões prévias (1 a 6).

Colecciones de tareas comentadas

(a) Texas Instruments

(b) Casio

(a) *Através do QR Code pode obter informações mais técnicas sobre a utilização do sensor de movimento CBR2, com o software TI-Nspire CX II-T.*

(b) *Através do* QR *Code pode obter informações mais técnicas sobre a utilização do sensor de movimento BT55I, com o CILAB, sob software da CASIO.*

. Qual é a variável representada no eixo horizontal (eixo das abcissas ou eixo dos xx) e qual é a variável representada no eixo vertical (eixo das ordenadas ou eixo dos yy)?
Quais são as respetivas unidades e a que valores corresponde cada marca em cada eixo?

Colecciones de tareas comentadas

Tarefa 3b

Numa fase preparatória da aula, o professor deverá criar as condições para aplicar a tarefa com o recurso ao Desmos Classroom. As instruções prévias estão disponíveis neste link.

Fases da aula:

Fase prévia: o professor deverá apresentar a plataforma Desmos Classroom, a partir da qual se irá realizar a tarefa proposta.

Colecciones de tareas comentadas

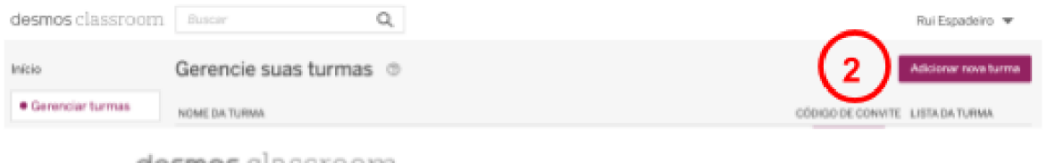
Instruções prévias para a utilização dos Desmos

- Criar conta no Desmos Classroom (https://teacher.desmos.com/)

  Nota: Usar email institucional

- Criar a turma

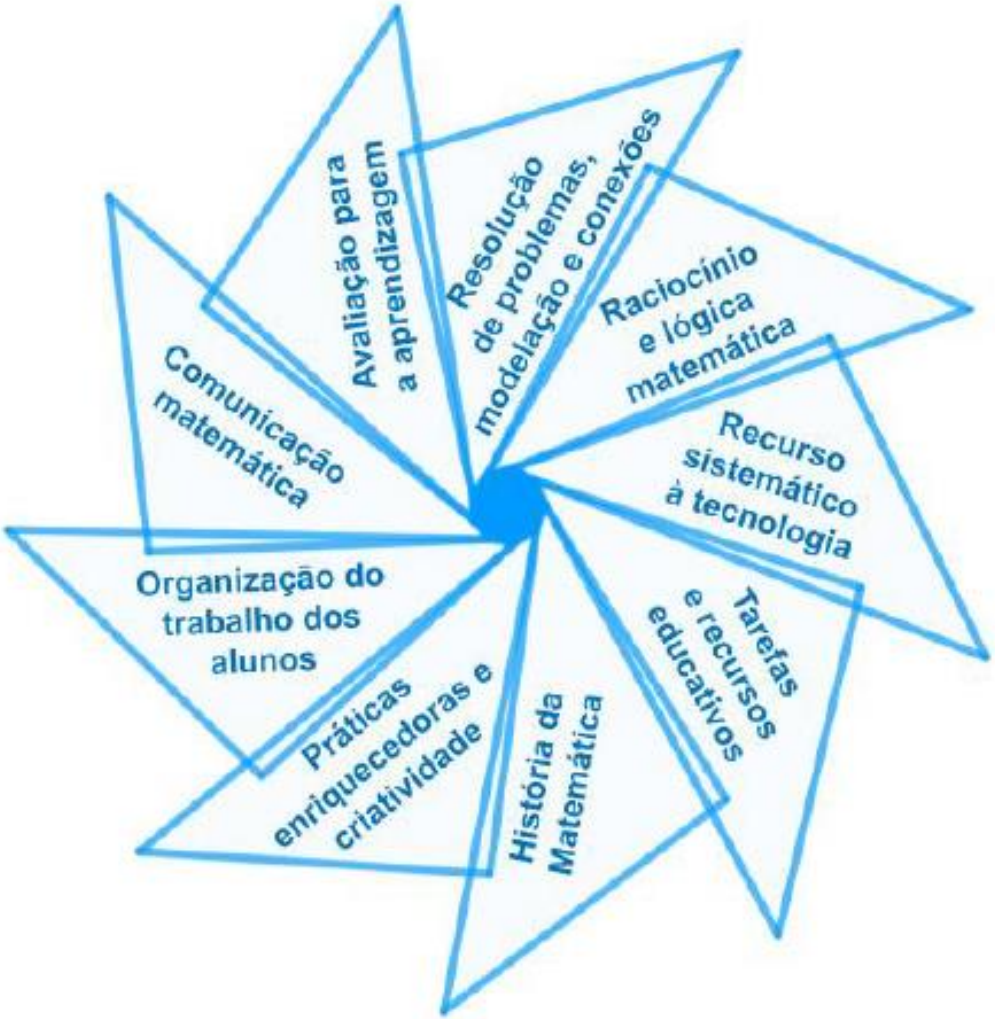
  Nota: Sugere-se a importação de turma do Google Classroom



Colecciones de tareas comentadas

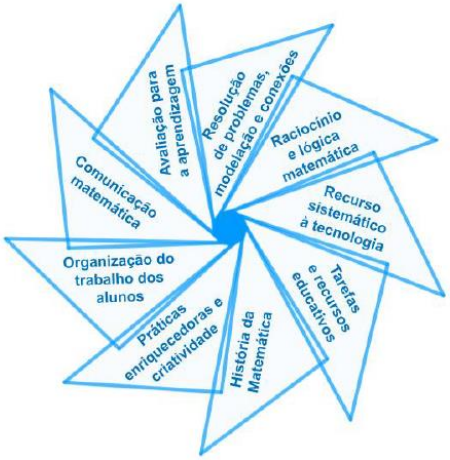
- Todas las tareas se utilizaron en clases piloto.
- Las tareas se perfeccionan mediante la práctica.
- Todas las tareas son comentadas, con sugerencias y recomendaciones en función de su uso en clases piloto.

Matemática A



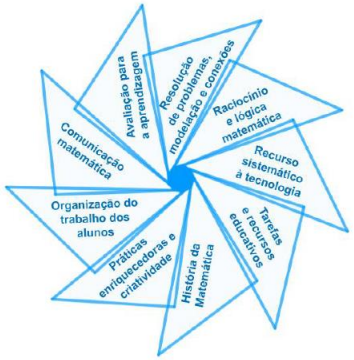
Ideas clave de aprendizajes esenciales

Matemática A



- Resolución de problemas, **modelación matemática** y conexiones.
- **Razonamiento** y lógica matemática.
- Uso sistemático de la **tecnología**.
- **Tareas** y recursos educativos.
- **Historia** de las Matemáticas.
- Prácticas enriquecedoras y **creatividad**.
- **Organización del trabajo** de los estudiantes.
- **Comunicación** matemática.
- **Evaluación** para el aprendizaje.

Matemática A

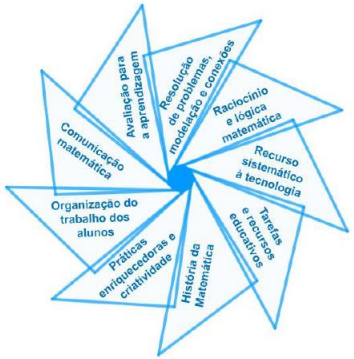


Tareas y recursos educativos

Apoyar el aprendizaje en diversas tareas, contextos y recursos.

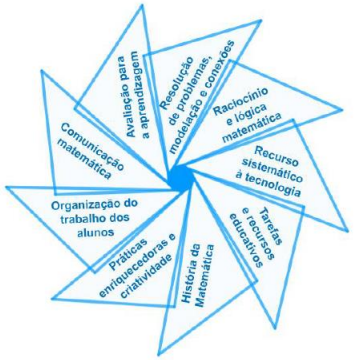
La construcción de tareas de aprendizaje constituye una de las acciones decisivas del docente.

Matemática A



Una tarea matemática enriquecedora puede tomar la forma de un problema, una pregunta exploratoria, un ejercicio aplicado, un pequeño proyecto o una investigación en profundidad, siempre que cumpla con los siguientes criterios: sea interesante y desafiante, involucre matemáticas relevantes, cree oportunidades para aplicar y expandir el conocimiento, permita diferentes estrategias, posibilite monitorear la comprensión de los estudiantes y apoye su progreso.

Matemática A



Las tareas también deben ser diversificadas y ajustadas a los objetivos de aprendizaje y su planificación debe prever distintos tipos de organización del trabajo de los estudiantes. La utilización de recursos variados, en particular la tecnología, así como la diversificación de los contextos de aprendizaje, incluidos laboratorios, espacios fuera del aula, museos de ciencias y otros, deben recibir especial atención al construir las tareas.

herramientas apropiadas

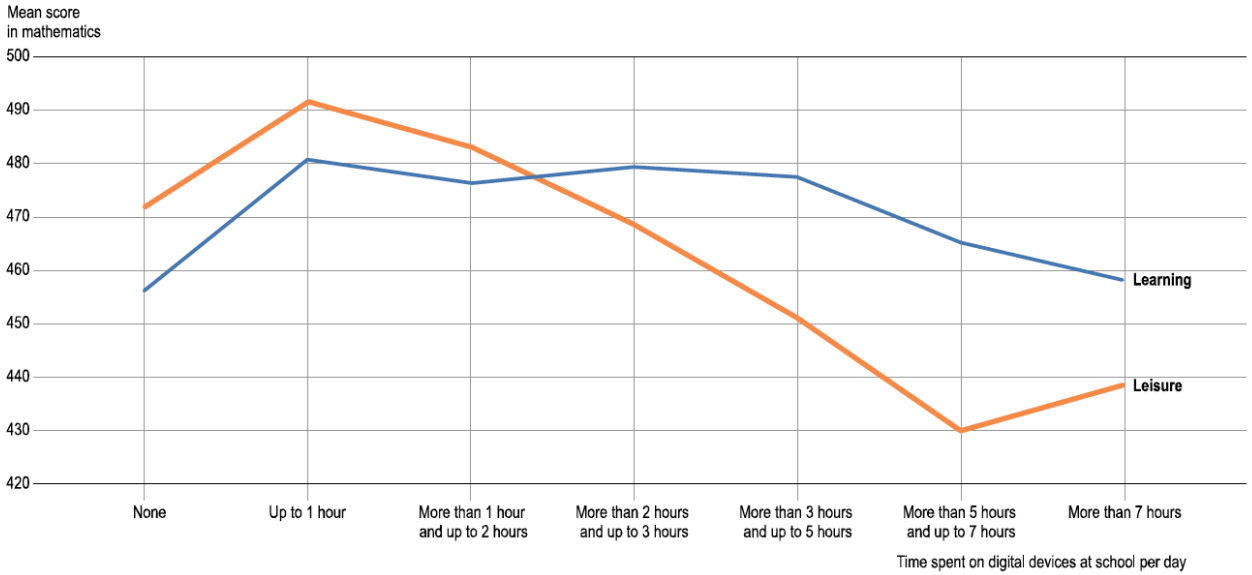
Uso sistemático de la **tecnología**

El enfoque exploratorio de las ideas y conceptos matemáticos se presenta como decisivo, lo que presupone llevar al estudiante a participar activamente en un proceso de construcción y profundización, motivado por preguntas desafiantes, problemas y la búsqueda de justificaciones. La integración de la tecnología se considera indispensable en este proceso, por las posibilidades que ofrece para la experimentación, visualización, representación, simulación, interactividad, así como, evidentemente, el cálculo numérico y simbólico.

PISA 2022

Figure II.5.14. Time spent on digital devices at school and mathematics performance

Based on students' reports; OECD average



Tempo gasto em dispositivos digitais na escola por dia

herramientas apropiadas

- Calculadora gráfica (CG) aceptada por los profesores (introducida por la primera vez en 1997)
- (los matemáticos …)
- Exámenes nacionales desde 2000 con una o dos preguntas que necesitan el uso de CG

herramientas apropiadas

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x<\dfrac{1}{2}\\[2ex] (x+1)\ln x & \text{se } x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

4.3. Mostre que a equação $f(x)=3$ é possível em $]1,e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x)=3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

2015

herramientas apropiadas

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x<\dfrac{1}{2}\\[2ex] (x+1)\ln x & \text{se } x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

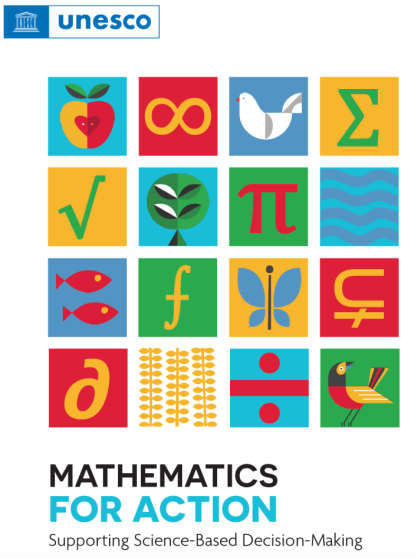
Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

2015

Enseñar Matemática!

Formar **ciudadanos reflexivos y críticos** que puedan hacer frente a las **demandas matemáticas de la vida cotidiana**, y también para preparar un número suficiente de matemáticos y científicos capaces de hacer frente a los **desafíos del mundo contemporáneo**.



2022

Congreso
«Avanzando en el Refuerzo de las Competencias Lectora y Matemática»

Mejorar las prácticas con tareas matemáticas estimulantes y creativas

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra, Portugal

Palacio de Congresos de Oviedo (Asturias), 15 y 16 de mayo de 2025

Curriculum realizado

3. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.

Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$$

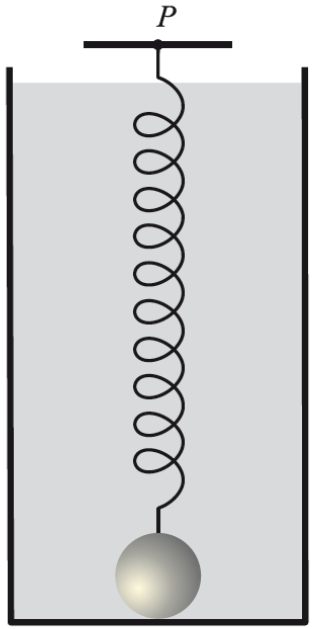


Figura 3

3.1. Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é $16\,\text{cm}$

Determine o volume da esfera.

Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

3.2. Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

2015

Curriculum realizado

6. Sejam f e g as funções, de domínio $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x < \dfrac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$f(x) = 1 -$

Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$

Considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $\operatorname{sen}(3a) = -\frac{1}{3}$

2015

Curriculum realizado

3. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.

Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$$

3.1. Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é $16\,\text{cm}$

Determine o volume da esfera.

Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

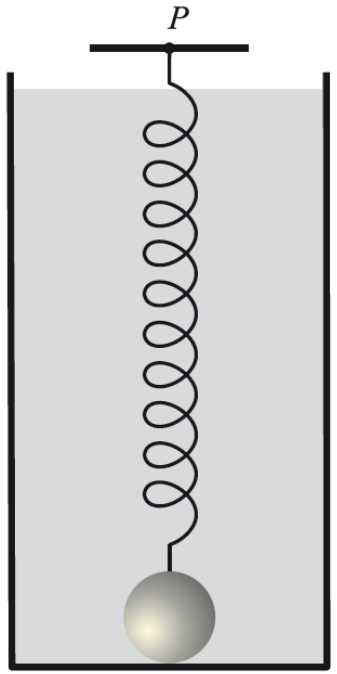


Figura 3

2015

Curriculum realizado

- MACS Matemática Aplicada a las Ciencias Sociales

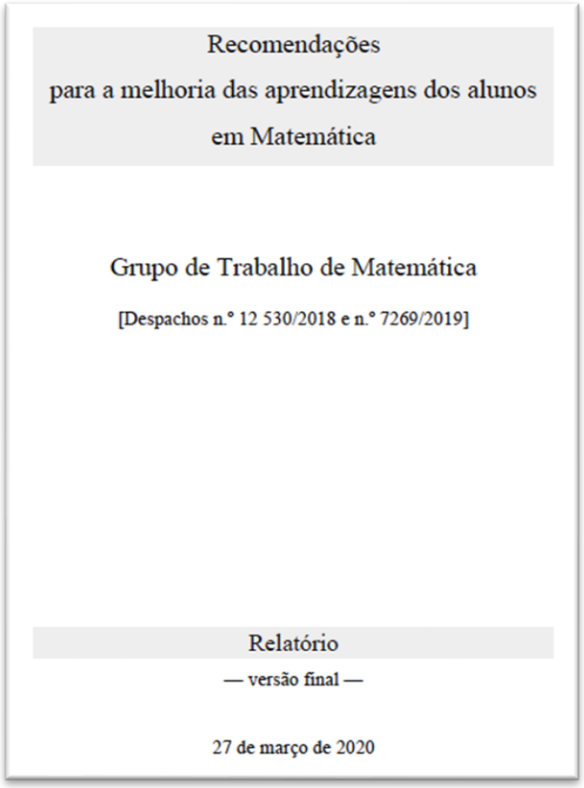
Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Métodos de apoio à decisão	Modelos matemáticos nas eleições	20	8
	Modelos matemáticos na partilha	20	
Estatística	Problema estatístico + População e amostra	3	12
	Dados univariados	25	
	Dados bivariados	20	
	[Trabalho de projeto]	12	
Modelos matemáticos	Modelos financeiros	10	8
	Matemática nos salários	15	
	Matemática na poupança e no crédito	15	
		Total	28

Curriculum realizado

- MACS Matemática Aplicada a las Ciencias Sociales

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Modelos de grafos e populacionais	Introdução aos grafos	6	12
	Grafos de Euler	12	
	Grafos de Hamilton	12	
	Modelos populacionais	12	
	Crescimento linear, exponencial, logarítmico e logístico	18	
	[Trabalho de projeto]	12	
Probabilidade	Fenómeno aleatório	2	9
	Probabilidade	16	
	Probabilidade condicionada	12	
	Modelos de probabilidade em espaços finitos	12	
	Modelo normal	12	
Introdução à Inferência Estatística	Introdução à inferência estatística	12	7
	Distribuição de uma amostragem estatística	16	
	Intervalos de confiança	14	
		Total	28

Curriculum evaluado


Recomendações
para a melhoria das aprendizagens dos alunos
em Matemática

Grupo de Trabalho de Matemática

[Despachos n.º 12 530/2018 e n.º 7269/2019]

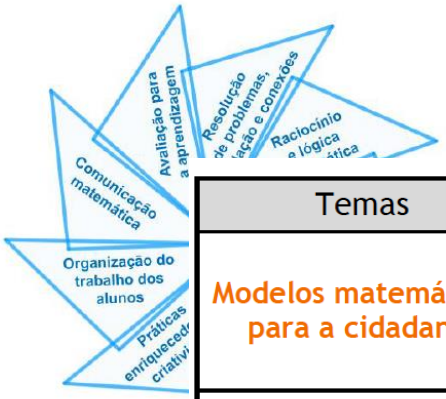
Relatório
— versão final —

27 de março de 2020

Carvalho e Silva, Jaime (coord) (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*.

Dado que los procesos de desarrollo curricular son extremadamente complejos y requieren una atención constante y prolongada, se sugiere la creación de una entidad, como un **instituto de desarrollo curricular**, que sea enteramente responsable de la regulación de los procesos de cambio curricular, incluida la evaluación de los libros de texto.

Matemática A (año 10)

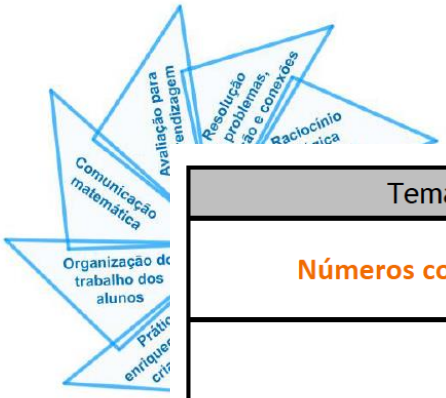


Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Modelos matemáticos para a cidadania	Modelos matemáticos nas eleições	5	4
	Modelos matemáticos na partilha	5	
	Modelos matemáticos em finanças	10	
Estatística	Problema estatístico e População e amostra	2	6
	Dados univariados	15	
	Dados bivariados	8	
	[Trabalho de projeto]	5	
Geometria sintética no plano	Pontos notáveis do triângulo	8	3
	Reta de Euler	4	
	Circunferência dos 9 pontos	3	
Funções	Generalidades acerca de funções	5	6
	Funções polinomiais de grau não superior a 2	20	
	Funções definidas por ramos	5	
Geometria analítica no plano e no espaço	Geometria analítica no plano	15	9
	Geometria analítica no espaço	10	
	Vetores no plano e no espaço	20	
		Total	28

Matemática A (año 11)

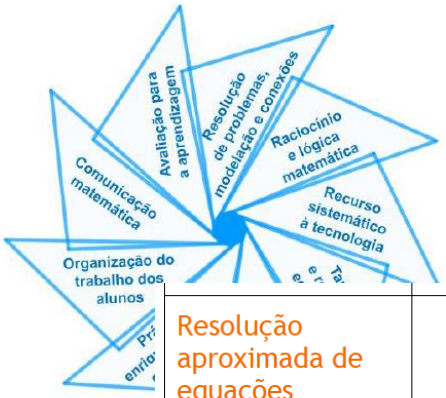
Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Geometria	Trigonometria	35	12
	Produto escalar	25	
Matemática discreta	Contagem	15	7
	Sucessões	4	
	Progressões aritméticas e geométricas	11	
	[Trabalho de projeto]	5	
Funções	Funções cúbicas e quárticas	19	9
	Operações com funções	3	
	Funções racionais	6	
	Cálculo diferencial	17	
		Total	28

Matemática A (año 12)



Temas	Tópicos	Aulas (45 min)	Semanas
Números complexos	Números complexos na forma algébrica	12	5
	Números complexos na forma trigonométrica	18	
Probabilidade	Fenómeno aleatório	2	6
	Probabilidade	8	
	Probabilidade condicionada	12	
	Modelos de probabilidade em espaços finitos	10	
	Modelo Normal	4	
Funções	Função exponencial	6	14
	Função inversa	4	
	Função logarítmica	16	
	Função composta	2	
	Derivadas	26	
	Funções contínuas e deriváveis	18	
	Resolução aproximada de equações	12	
Tema Opcional	Introdução à inferência estatística	18	3
	Primitivas imediatas e Integrais definidos		
	Matrizes		
		Total	28

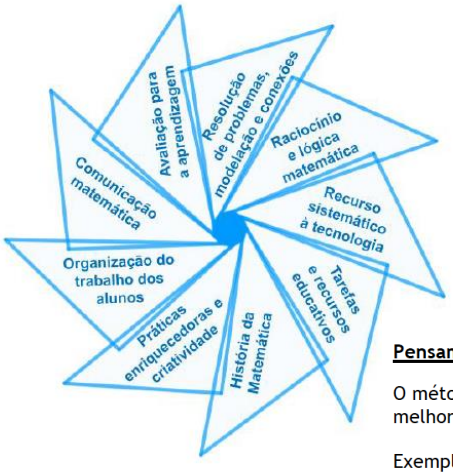
Matemática A (año 12)



Resolução aproximada de equações Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy) Método da Bisseção Método de Newton-Raphson	Conhecer o teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy). Conhecer e aplicar o método da Bisseção. Conhecer e aplicar o método de Newton-Raphson.	Considerar o teorema dos valores intermédios para funções contínuas em intervalos abertos que contenham o intervalo fechado onde se estudam os valores intermédios. Apresentar como objetivo a resolução por métodos aproximados de qualquer equação, tendo em conta que existem muitas situações em que não é possível obter uma solução expressa em termos das funções já estudadas. Promover o uso sistemático da tecnologia na aplicação dos diferentes métodos considerados para a obtenção aproximada de soluções de equações. Propor a elaboração de programas em *Python* para implementar os métodos de Newton-Raphson e da Bisseção. Ilustrar a partir de um exemplo concreto a interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.

Resolución aproximada de ecuaciones

Matemática A (año 12)



Pensamento Computacional

O método da Bisseção é análogo ao método de pesquisa binária numa lista ordenada e, entre os métodos de seção do intervalo, é o que, em geral, produz melhores estimativas para igual número de avaliações da função.

Exemplo de programa *Python* para calcular a aproximação de uma raiz num determinado intervalo através do método da Bisseção.

```
def bissecao(f,a,b,erro):
    if f(a)*f(b) > 0:
        print("A função tem imagens com o mesmo sinal nos extremos deste intervalo")
        exit(0)
    while b-a > 2*erro:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) < 0:
            b = c
        elif f(a)*f(c) > 0:
            a = c
        else:
            return c    #chamada no caso em que f(c)=0
    return c

def f(x):
    return x**3-5*x**2+2*x-3

print(bissecao(f,0,5,0.000001))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

El futuro?

Opiniões sobre os novos programas

Uma sondagem aos participantes no ProfMat 91

Henrique M. Guimarães e José Manuel Matos

Quando começámos a planear este número sobre a reforma curricular achámos que teria interesse dar a conhecer a opinião de professores de Matemática sobre os novos programas. Assim, aproveitando a realização do ProfMat no Porto, distribuímos um questionário sobre o assunto a todos os participantes. Neste artigo apresentamos os resultados a que chegámos.

Apresentação

O questionário que foi distribuído destinava-se a estudar as [illegible] e expectativas dos professores [illegible]

lativamente aos novos programas, be como conhecer a apreciação que fazia desses programas e as suas expectativa sobre a sua futura generalização.

No final do ProfMat foram-nos e tregues 162 questionários com as re postas dos professores, todos do ensi não superior, cobrindo maioritariamen o 3º Ciclo e o Ensino Secundário, correspondendo em larga maioria professores com mais de 9 anos de e periência (ver na caixa "Quem respon deu?"). Chamamos desde já a atenção d pequeno número de questionários pr venientes de professores do 1º Ciclo,

APM
Associação de Professores
de Matemática